



2017年理系第2問

2 n を自然数とする。以下の問に答えよ。

(1) 実数 x に対して、次の等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k e^{-kx} - \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}$$

(2) 次の等式をみたす S の値を求めよ。

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k (1-e^{-k})}{k} - S = (-1)^n \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx$$

(3) 不等式

$$\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx \leq \frac{1}{n+1}$$

が成り立つことを示し、 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (1-e^{-k})}{k}$ を求めよ。