



2010年理系第5問

5 座標平面において、点 $P_n(a_n, b_n)$ ($n \geq 1$) を

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n \geq 2)$$

で定める。このとき、以下の問に答えよ。

(1) a_n, b_n を n と θ を用いて表せ。

(2) $\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき、自然数 n に対して、線分 $P_n P_{n+1}$ の長さ l_n を求めよ。

(3) (2) で求めた l_n に対して、 $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ を求めよ。