2014年 第5問　　1枚目／2枚

$\boxed{5}$ $0 < x \leqq 2\pi$ において定義された関数 $h(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $h(x)$ の最小値を与える x がただ一つ存在することを示せ．

(2) $h(x)$ の最小値を与える x の値を b とおく．次の定積分を求めよ．

$$\int_{\pi}^{b} x^2 h(x)\,dx$$

(3) b は $\dfrac{17}{12}\pi < b < \dfrac{3}{2}\pi$ をみたすことを示せ．

(1) $h'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$

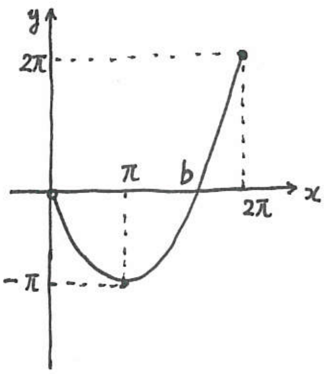
ここで，$f(x) = x\cos x - \sin x$ とおくと，

$f'(x) = \cos x - x\sin x - \cos x$

$= -x\sin x$

$\therefore$ $0 < x \leqq 2\pi$ において　$f'(x) = 0$ となるのは，$x = \pi, 2\pi$

x	(0)	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0
$f(x)$	(0)	$\searrow$	$-\pi$	$\nearrow$	2π



$\therefore$ 右のグラフより，$f(x) = 0$ となるのは，

ただ1つであり，それを $x = b$ とおく

このとき，$h'(x) = 0$ となる x は $x = b$ のみであるから，

増減表より，$h(x)$ の最小値を与える x はただ一つ存在する ■

x	(0)	$\cdots$	b	$\cdots$	2π
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	0

(2) $\displaystyle\int_{\pi}^{b} x^2 h(x)\,dx = \int_{\pi}^{b} x\sin x\,dx$

$\displaystyle = \int_{\pi}^{b} x(-\cos x)'\,dx$

$\displaystyle = \Big[-x\cos x\Big]_{\pi}^{b} + \int_{\pi}^{b} \cos x\,dx$

$\displaystyle = -b\cos b - \pi + \Big[\sin x\Big]_{\pi}^{b}$

$= \sin b - b\cos b - \pi$

ここで，$f(b) = 0$ より，$b\cos b - \sin b = 0$

$\displaystyle\therefore \int_{\pi}^{b} x^2 h(x)\,dx = \underline{-\pi}$ //

大阪府立大学

2014年 第5問　　2枚目／2枚

5　$0 < x \leqq 2\pi$ において定義された関数 $h(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $h(x)$ の最小値を与える x がただ一つ存在することを示せ．

(2) $h(x)$ の最小値を与える x の値を b とおく．次の定積分を求めよ．

$$\int_{\pi}^{b} x^2 h(x)\,dx$$

(3) b は $\dfrac{17}{12}\pi < b < \dfrac{3}{2}\pi$ をみたすことを示せ．

(3). $\pi < \frac{17}{12}\pi < 2\pi$ ， $\pi < \frac{3}{2}\pi < 2\pi$ であり，

$y = f(x)$ は $\pi \leqq x \leqq 2\pi$ で単調増加であることより，

$\frac{17}{12}\pi$，b，$\frac{3}{2}\pi$ の大小関係は，$f(\frac{17}{12}\pi)$，$f(b) = 0$，$f(\frac{3}{2}\pi)$ の大小関係に等しい．

$$f\left(\frac{17}{12}\pi\right) = \frac{17}{12}\pi\cos\frac{17}{12}\pi - \sin\frac{17}{12}\pi$$
$$= -\frac{17}{12}\pi\cos\frac{5}{12}\pi - \sin\frac{5}{12}\pi$$

ここで，$\cos\frac{5}{12}\pi = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} > 0$

$\sin\frac{5}{12}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} > 0$

注　$0 < \frac{5}{12}\pi < \frac{\pi}{2}$ より $\sin\frac{5}{12}\pi > 0$，$\cos\frac{5}{12}\pi > 0$ とするだけで良かった…（遠回りした）

より，$f(\frac{17}{12}\pi) < 0$ ，一方，$f(\frac{3}{2}\pi) = \frac{3}{2}\pi\cos\frac{3}{2}\pi - \sin\frac{3}{2}\pi = 1 > 0$

$\therefore f(\frac{17}{12}\pi) < f(b) = 0 < f(\frac{3}{2}\pi)$ となるので，

$\frac{17}{12}\pi < b < \frac{3}{2}\pi$ ■