

2014年 生命環境（環境・情報）第2問

2  $p, q$  は自然数とする.  $\alpha, \beta$  は  $\alpha > \beta$  を満たす2次方程式  $x^2 - x - 1 = 0$  の解とする. 2つの数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  を

$$a_1 = 0, \quad b_1 = 1$$

$$a_{n+1} = (p+q)a_n + pb_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_{n+1} = pa_n + qb_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める. 以下の問いに答えよ.

- (1)  $a_n > 0$  ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ) かつ  $b_n > 0$  ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ) となることを示せ.
- (2)  $c_n = \alpha a_n + b_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ),  $d_n = -a_n + \alpha b_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) とおく.  $c_n = (p\alpha + q)^{n-1}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) かつ  $d_n = \alpha(p\beta + q)^{n-1}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) が成り立つことを示せ.
- (3)  $p\beta + q > 0$  のとき,  $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} > \frac{a_n}{b_n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) となることを示せ.