

2016年第2問

2 次の問いに答えよ。

- (1) 実数  $a, b, c$  が  $a+b+c=5$  かつ  $ab+bc+ca=4+abc$  を満たすとき,  $a, b, c$  の少なくとも一つは 1 であることを示せ.
- (2)  $x^2-4x+1=0$  のとき,  $x^3+\frac{1}{x^3}$ ,  $x^5+\frac{1}{x^5}$  の値を求めよ.
- (3) 次の関数を微分せよ.

$$y = x^{\cos x} \quad (x > 0)$$

$$\begin{aligned} (1) \quad (a-1)(b-1)(c-1) &= abc - (ab+bc+ca) + a+b+c - 1 \\ &= abc - (4+abc) + 5 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore a-1=0 \text{ または } b-1=0 \text{ または } c-1=0$$

すなわち,  $a, b, c$  の少なくとも一つは 1 である  $\square$ 

- (2)
- $x \neq 0$
- であるから,
- $x^2-4x+1=0$
- の両辺を
- $x$
- で割って,

$$x + \frac{1}{x} = 4 \quad \text{これを便って計算する.}$$

$$\begin{aligned} x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= 4^3 - 3 \cdot 4 \\ &= \underline{52} \text{,,} \end{aligned}$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 4^2 - 2 = 14$$

$$\begin{aligned} x^5 + \frac{1}{x^5} &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= 14 \cdot 52 - 4 \\ &= \underline{724} \text{,,} \end{aligned}$$

- (3) 両辺, 対数をとって,
- $\log y = \cos x \cdot \log x$

$$\text{両辺 } x \text{ で微分して, } \frac{d}{dx} \cdot \log y = -\sin x \cdot \log x + \cos x \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{d}{dy} \cdot \log y \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{y'}{y} = -\sin x \cdot \log x + \frac{\cos x}{x}$$

$$\therefore y' = x^{\cos x} \left( \frac{\cos x}{x} - \sin x \log x \right) \text{,,}$$