0002373186267999

大阪市立大学

2017年 文系 第1問　　増田

$\boxed{1}$ 駒が単位時間ごとに座標平面上を移動するものとする．nは0以上の整数とし，時刻nに点$(x,\ y)$にある駒は，時刻$n+1$には$\frac{1}{4}$ずつの確率で，4点$(x+1,\ y)$，$(x-1,\ y)$，$(x,\ y+1)$，$(x,\ y-1)$のいずれかに移動するものとする．時刻0に点$(0,\ 0)$にある駒について，次の問いに答えよ．

(1) 時刻2に，駒が点$(0,\ 0)$，点$(1,\ 0)$，点$(1,\ 1)$，点$(2,\ 0)$にある確率を，それぞれ求めよ．

(2) 時刻4に，駒が点$(0,\ 0)$にある確率を求めよ．

(3) 時刻nに駒が点$(x,\ y)$にあるとき，nと$x+y$の差は2の倍数であることを示せ．

(1) ① 点(0,0)にある確率

原点 $\rightleftarrows$　$\downarrow\uparrow$　$\leftrightarrows$　$\downarrow\uparrow$　時刻1で進んで 時刻2で戻る 4通り

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times4=\frac{1}{4}$$

② 点(1,0)

条件の移動法では 時刻2に点(1,0)には到着しない。

よって 確率は 0

③ 点(1,1)

$\cdot\rightarrow(1,0)\uparrow(1,1)$ か $\cdot\uparrow(0,1)\rightarrow(1,1)$ の2通り

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times2=\frac{1}{8}$$

④ 点(2,0)

$\cdot\rightarrow(1,0)\rightarrow(2,0)$ の1通り

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

(2) 時刻4に駒が点(0,0)にあるのは

i) 時刻2に$(\pm2,0)$, $(0,\pm2)$にある

ii) 時刻2に$(0,0)$にある

iii) 時刻2に$(1,1)(1,-1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$にある

の3パターン

i) 時刻2に$(\pm2,0)$, $(0,\pm2)$にある

例えば $\underset{右}{\rightarrow}\underset{右}{\rightarrow}\underset{左}{\leftarrow}\underset{左}{\leftarrow}$ など 4通り

ii) 時刻2に$(0,0)$にある

時刻1,2で4通り、時刻3,4も4通り

$\underset{上下}{\uparrow\downarrow}$ $\underset{右左}{\rightleftarrows}$ $\underset{下上}{\downarrow\uparrow}$ $\underset{左右}{\leftrightarrows}$

$4\times4=16$ 通り

iii) 時刻2に$(1,1)(1,-1)(-1,1)(-1,-1)$にある

例えば 時刻1,2で2通り、時刻3,4も2通り

右上　上右　　下左　左下

$2\times2\times4=16$通り

求める確率は、

$$\frac{4+16+16}{4\times4\times4\times4}=\frac{9}{64}$$

(3) 数学的帰納法を使う

(証) i) $n=0$のとき、駒は点$(0,0)$にあり、

$0-(0+0)=0$ となり2の倍数

$n=1$のとき 点$(x,y)=(\pm1,0),(0,\pm1)$で、

$$n-(x+y)=\begin{cases}1-1\\1-(-1)\end{cases}=\begin{cases}0\\2\end{cases}$$ どちらも2の倍数

ii) $n=k\ (\geqq1)$のとき 点(x_k,y_k)にあり、

$k-(x_k+y_k)=2m$ (m:整数)

とする。

$n=k+1$のとき、

$$k+1-(\underbrace{x_{k+1}+y_{k+1}}_{(x_k\pm1,\ y_k)\text{か}(x_k,\ y_k\pm1)})=2m+\begin{cases}0\\2\end{cases}$$ どちらも2の倍数

以上よりすべてのnに対して題意が成り立つ。圏