立教大学

2015年 理学部（個別日程）第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ aは0でない実数，rは$0<r<1$を満たす実数とする．初項a，公比rの等比数列a_1，a_2，a_3，…に対し，

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\quad T=\sum_{n=1}^{\infty}a_na_{n+1}$$

とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) SとTをそれぞれaとrを用いて表せ．

(2) $S=T$のとき，aをrを用いて表せ．

(3) $S=T$のとき，Sをrを用いて表せ．

(4) $S=T$のとき，Sの最小値と，最小値を与えるrの値をそれぞれ求めよ．

(1) $a_n=a\cdot r^{n-1}$ より．$0<r<1$ のとき．

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}a\cdot r^{n-1}=\underline{\frac{a}{1-r}}_{\,/\!/}$$

$$T=\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}\cdot ar^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}a^2r^{2n-1}=\underline{\frac{a^2r}{1-r^2}}_{\,/\!/}$$

(2) $S=T \iff \dfrac{a}{1-r}=\dfrac{a^2r}{1-r^2}$ $\quad\therefore\ \underline{a=1+\dfrac{1}{r}}_{\,/\!/}$

(3) (1)(2)より．$S=\dfrac{1+\frac{1}{r}}{1-r}=\underline{\dfrac{1+r}{r(1-r)}}_{\,/\!/}$

(4) $S(r)=\dfrac{1+r}{r(1-r)}$ とおくと．

$$S'(r)=\frac{r(1-r)-(1+r)(1-2r)}{r^2(1-r)^2}=\frac{r^2+2r-1}{r^2(1-r)^2}$$

$\therefore\ S'(r)=0$ となるのは．$r=\dfrac{-2+\sqrt{4+4}}{2}=-1+\sqrt{2}$ （$\because\ 0<r<1$より）

$\therefore$ 右の増減表より．Sの最小値は $\underline{3+2\sqrt{2}}_{\,/\!/}$

$\underline{r=-1+\sqrt{2}\ のとき}_{\,/\!/}$

r	(0)	…	$-1+\sqrt{2}$	…	(1)
$S'(r)$		$-$	0	$+$	
$S(r)$		↘	$3+2\sqrt{2}$	↗	