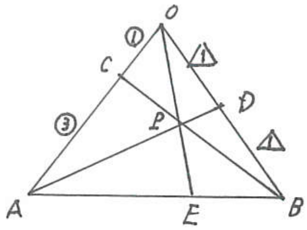
立教大学

2016年 経済（経済、会計）・観光（観光）・コミュ（スポーツ） 第3問

$\boxed{3}$ AB＝1である三角形OABにおいて，OAを1：3に内分する点をC，OBを1：1に内分する点をD，ADとBCの交点をPとする．このとき，次の問いに答えよ．



(1) $\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AD}}=t$ とおくとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$t$ を用いて表せ．

(2) (1)で定めた t の値を求めよ．

(3) OPとABとの交点をEとするとき，$\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EB}}$ を求めよ．

(4) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ であるとき，OAとOBの長さを求めよ．

(5) (4)のとき，三角形OABに内接する円の半径 r を求めよ．

(1) $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AD}$ より

$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})$$

$$\therefore\ \overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OD}$$

$$=\underline{(1-t)\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}t\overrightarrow{OB}}\ //$$

(2) メネラウスの定理より．

$$\frac{3}{1}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{DP}{AP}=1 \quad \therefore\ DP:AP=1:6$$

$$\therefore\ t=\frac{AP}{AD}=\underline{\frac{6}{7}}\ //$$

(3) チェバの定理より． $\dfrac{3}{1}\cdot\dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{EB}{AE}=1 \quad \therefore\ \underline{\dfrac{AE}{EB}=3}\ //$

(4) $|\overrightarrow{AB}|=1$ より $|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|=1$

$$\therefore\ |\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OA}|^2=1 \qquad \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0 \text{ より } |\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2=1 \ \cdots ①$$

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{7}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{7}\overrightarrow{OB}\right)\cdot(-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$$

$$=-\frac{1}{7}|\overrightarrow{OA}|^2+\frac{3}{7}|\overrightarrow{OB}|^2$$

$$\therefore\ -|\overrightarrow{OA}|^2+3|\overrightarrow{OB}|^2=0 \ \cdots ②$$

①，②より． $\underline{OA=|\overrightarrow{OA}|=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ OB=|\overrightarrow{OB}|=\dfrac{1}{2}}\ //$

(5) $\triangle OAB=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

一方，$\triangle OAB=\dfrac{1}{2}r(1+|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OB}|)=\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}r$

$$\therefore\ \frac{3+\sqrt{3}}{4}r=\frac{\sqrt{3}}{8} \qquad \therefore\ \underline{r=\frac{\sqrt{3}-1}{4}}\ //$$