



2014年工・情報学部第3問

 数理
石井K

3 数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}(a_n + 2n) - n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) をみたすとする.

- (1) $b_n = \frac{a_n}{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおくと、 b_{n+1} を b_n で表せ。
 (2) さらに $c_n = b_n - \frac{2}{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおくと、 c_{n+1} を c_n で表せ。
 (3) 数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。
 (4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) 与式の両辺を $n+2$ (>0) で割ると、 $\frac{a_{n+1}}{n+2} = \frac{a_n}{n+1} + \frac{2n}{n+1} - \frac{n}{n+2}$

$$\therefore b_{n+1} = b_n + \frac{2n(n+2) - n(n+1)}{(n+1)(n+2)} \quad \therefore b_{n+1} = b_n + \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}$$

(2) $b_n = c_n + \frac{2}{n+1}$ より、(1) の漸化式に代入して、

$$c_{n+1} + \frac{2}{n+2} = c_n + \frac{2}{n+1} + \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)} \quad \therefore c_{n+1} = c_n + 1$$

(3) $\{c_n\}$ は初項 $c_1 = b_1 - 1 = \frac{a_1}{2} - 1 = 0$, 公差 1 の等差数列より

$$c_n = n - 1$$

(4) $b_n = c_n + \frac{2}{n+1}$ より、 $b_n = n - 1 + \frac{2}{n+1} \quad \therefore b_n = \frac{n^2 + 1}{n+1}$

$$\therefore a_n = n^2 + 1$$