



2013年薬学部第2問

2 一般項が, $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) がある.

このとき, $\{a_n\}$ は自然数からなる数列であることが次のようにして示される.

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ とおくと, } \alpha + \beta = \boxed{\text{ア}}, \alpha\beta = \boxed{\text{イウ}} \text{ となる.}$$

ここで

$$a_1 = \boxed{\text{エ}}, a_2 = \boxed{\text{オ}} \quad \dots\dots\text{①}$$

a_n を α, β を用いて表すと, $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$ である.

このとき

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\alpha^{n+} \boxed{\text{カ}} - \beta^{n+} \boxed{\text{キ}} \right) (\alpha + \beta) - \alpha\beta(\alpha^n - \beta^n) \right\} \end{aligned}$$

となり

$$a_{n+2} = \boxed{\text{ク}} a_{n+1} + \boxed{\text{ケ}} a_n \quad \dots\dots\text{②}$$

が成り立つ. よって ①, ② より, $a_3 = \boxed{\text{コ}}$, $a_4 = \boxed{\text{サ}}$, \dots となり, $\{a_n\}$ は自然数からなる数列であることが示された.