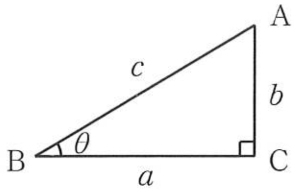
立教大学

2015年 法・経済（経済政策）第2問

$\boxed{2}$ 図のように $\angle$ACB が直角である直角三角形 ABC があり，$a=\mathrm{BC}$，$b=\mathrm{CA}$，$c=\mathrm{AB}$，$\angle\mathrm{ABC}=\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$，$t=\tan\dfrac{\theta}{2}$ とする．このとき，次の問に答えよ．



(1) $\dfrac{a}{c}$，$\dfrac{b}{c}$ をそれぞれ t を用いて表せ．

(2) $\dfrac{b}{a+c}$ を t を用いて表せ．

(3) $\dfrac{b}{c}=\dfrac{12}{13}$ となる t の値を求めよ．

(4) a，b，c を適当に並び換えると等差数列になるときの $\dfrac{a}{c}$，$\dfrac{b}{c}$ の値の組をすべて求めよ．

(1) $\tan^2\dfrac{\theta}{2}+1=\dfrac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$ より．$\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{1+t^2}$

$0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{4}$ より $\cos\dfrac{\theta}{2}>0$ $\quad\therefore\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$，$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

$\therefore\ \dfrac{a}{c}=\cos\theta=\cos^2\dfrac{\theta}{2}-\sin^2\dfrac{\theta}{2}$ $\qquad\therefore\ \underline{\dfrac{a}{c}=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}$ //

$\dfrac{b}{c}=\sin\theta=2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$ $\qquad\therefore\ \underline{\dfrac{b}{c}=\dfrac{2t}{1+t^2}}$ //

(2) $\dfrac{b}{a+c}=\dfrac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}+1}=\dfrac{2t}{1-t^2+1+t^2}=\underline{t}$ // $\cdots$①

(3) $\dfrac{2t}{1+t^2}=\dfrac{12}{13}\iff 6t^2-13t+6=0$

$\iff(2t-3)(3t-2)=0$

$0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{4}$ より $0<t<1$ $\quad\therefore\ \underline{t=\dfrac{2}{3}}$ //

(4) $0<a,b<c$（$\because$ AB が斜辺より）であることから考えられるのは次の2つの場合

(i) a,b,c または c,b,a の順のとき

等差中項より，$2b=a+c$

①に代入して，$t=\dfrac{1}{2}$

このとき，$\dfrac{a}{c}=\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{b}{c}=\dfrac{4}{5}$

(ii) b,a,c または c,a,b の順のとき

等差中項より，$2a=b+c$

(2)と同様にして，$\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}+1}=\dfrac{1-t}{1+t}$

$\therefore\ \dfrac{1-t}{1+t}=\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore t=\dfrac{1}{3}$ このとき，$\dfrac{a}{c}=\dfrac{4}{5}$，$\dfrac{b}{c}=\dfrac{3}{5}$

(i)，(ii) より

$\underline{\left(\dfrac{a}{c},\dfrac{b}{c}\right)=\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right),\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5}\right)}$ //