0002047902597999

立教大学

2014年 現代心理（心理）・コミュ（コミュ）・観光（交流）・経営 第3問　1枚目／2枚

数理 石井K

3 実数 $p \neq -1$ に対し，2つの直線 ℓ，m と放物線 C を

$$\ell : y = -x + 1, \quad m : y = px - p^3, \quad C : y = \frac{1}{4}x^2 + qx + r$$

とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 放物線 C と直線 ℓ が点 A で接しているとき，r を q の2次式で表せ．また，点 A の x 座標を q を用いて表せ．

(2) 放物線 C と直線 ℓ が点 A で接し，さらに放物線 C と直線 m が点 B で接しているとき，q を p の2次式で表せ．また，点 B の x 座標を p を用いて表せ．

(3) 放物線 C と直線 ℓ が点 A で接し，さらに放物線 C と直線 m が点 B で接しているとき，放物線 C の頂点の y 座標が最大になるような p の値を求めよ．

(4) (1)，(2)，(3) で定められる p，q，r に対して，点 A を通り y 軸と平行な直線，点 B を通り y 軸と平行な直線，x 軸，および放物線 C で囲まれる部分の面積を求めよ．

(1) $\frac{1}{4}x^2 + (q+1)x + r - 1 = 0$ の判別式を D_1 とおくと．

$D_1 = (q+1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot (r-1) = 0$ 　$\therefore$ $\underline{r = q^2 + 2q + 2}$ //

また，A の x 座標は $\underline{x = -2q - 2}$ //

(2) $\frac{1}{4}x^2 + (q-p)x + r + p^3 = 0$ の判別式を D_2 とおくと，

$D_2 = (q-p)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot (r + p^3) = 0$ 　$\therefore$ (1)より r を消去すると，

$(q-p)^2 - (p^3 + q^2 + 2q + 2) = 0$

$\therefore (p+1)(p^2 - 2p + 2 + 2q) = 0$ 　$p \neq -1$ より．$p^2 - 2p + 2 + 2q = 0$

$\therefore$ $\underline{q = -\frac{1}{2}p^2 + p - 1}$ //　　また，B の x 座標は．$\underline{x = p^2 + 2}$ //

(3) C の頂点を求めると．$C : y = \frac{1}{4}(x + 2q)^2 - q^2 + r$ 　$\therefore$ 頂点は $(-2q,\ r - q^2)$

$\therefore$ (1)，(2) より．$r - q^2 = q^2 + 2q + 2 - q^2$

$= 2\left(-\frac{1}{2}p^2 + p - 1\right) + 2$

$= -(p-1)^2 + 1$

よって．頂点の y 座標が最大となるのは．$\underline{p = 1}$ //　　2枚目につづく

2014年 現代心理（心理）・コミュ（コミュ）・観光（交流）・経営 第3問　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ 実数 $p \neq -1$ に対し，2つの直線 ℓ，m と放物線 C を

$$\ell : y = -x + 1, \quad m : y = px - p^3, \quad C : y = \frac{1}{4}x^2 + qx + r$$

とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 放物線 C と直線 ℓ が点Aで接しているとき，r を q の2次式で表せ．また，点Aの x 座標を q を用いて表せ．

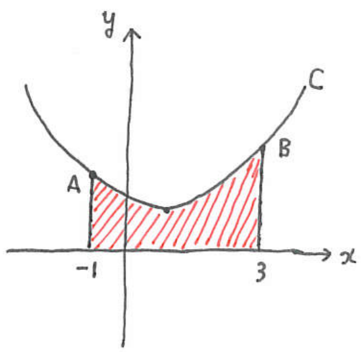
(2) 放物線 C と直線 ℓ が点Aで接し，さらに放物線 C と直線 m が点Bで接しているとき，q を p の2次式で表せ．また，点Bの x 座標を p を用いて表せ．

(3) 放物線 C と直線 ℓ が点Aで接し，さらに放物線 C と直線 m が点Bで接しているとき，放物線 C の頂点の y 座標が最大になるような p の値を求めよ．

(4) (1)，(2)，(3) で定められる p，q，r に対して，点Aを通り y 軸と平行な直線，点Bを通り y 軸と平行な直線，x 軸，および放物線 C で囲まれる部分の面積を求めよ．

(4) (1)〜(3)より．$p=1$，$q=-\frac{1}{2}$，$r=\frac{5}{4}$

$C : y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$，A$(-1, 2)$，B$(3, 2)$



$$\therefore S = \int_{-1}^{3} \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{4} + \frac{5}{4}x\right]_{-1}^{3}$$

$$= \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + \frac{15}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{5}{4}$$

$$= \underline{\frac{16}{3}}\ //$$