立教大学

2016年 理学部（個別日程） 第3問

数理 石井K

3 次の条件を満たす実数の数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を考える．

$$a_1=1,\quad b_1=0,\quad \begin{cases} a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n-b_n) \\ b_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+b_n) \end{cases} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

また，i を虚数単位とし，複素数 z_n を $z_n=a_n+b_ni$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $z_{n+1}=\alpha z_n$ となる複素数 α を求めよ．

(2) (1)で求めた複素数 α を極形式で $\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ と表すとき，r と θ を求めよ．ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする．

(3) $n\geqq 1$ に対して，z_n を極形式で $z_n=r_n(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)$ と表すとき，r_n と θ_n を n を用いて表せ．ただし，$\theta_n\geqq 0$ とする．

(4) $a_1+a_2+a_3+a_4$ を求めよ．

(5) N を自然数とするとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{4N}a_n$ を N を用いて表せ．

(1) $z_1=1$，$z_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$，$z_3=\frac{1}{2}i$，$z_4=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$，… より，$\underline{\alpha=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i}$ //

逆にこのとき，

$$\alpha z_n=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)(a_n+b_ni)$$
$$=\frac{1}{2}(a_n-b_n)+\frac{1}{2}(a_n+b_n)i$$
$$=a_{n+1}+b_{n+1}i$$
$$=z_{n+1}$$

となり，条件をみたしている．

(2) $\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ $\therefore$ $\underline{r=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \theta=\frac{\pi}{4}}$ //

(3) $z_{n+1}=\alpha z_n$ より，数列 $\{z_n\}$ は初項 1，公比 α の等比数列より

$$z_n=1\cdot\alpha^{n-1}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{n-1}=2^{\frac{1-n}{2}}\left\{\cos\left(\frac{n-1}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{n-1}{4}\pi\right)\right\}$$ （ド・モアブル）

$\therefore$ $\underline{r_n=2^{\frac{1-n}{2}},\ \theta_n=\frac{n-1}{4}\pi}$ //

(4) (1)より．$a_1+a_2+a_3+a_4=1+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}=\underline{\frac{5}{4}}$ //

(5) 数列 $\{a_{4n-3}+a_{4n-2}+a_{4n-1}+a_{4n}\}$ は初項 $\frac{5}{4}$，公比 $\left(-\frac{1}{4}\right)$ の等比数列より．

$$a_{4n-3}+a_{4n-2}+a_{4n-1}+a_{4n}=\frac{5}{4}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}=-5\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{4N}a_n=\sum_{n=1}^{N}(a_{4n-3}+a_{4n-2}+a_{4n-1}+a_{4n})=\sum_{n=1}^{N}\left\{-5\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}=-5\cdot\frac{-\frac{1}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^N\right\}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\underline{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^N}$$ //