立教大学

2016年 理学部（個別日程）第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ a, bを実数，tを正の実数とする．Oを原点とする座標平面上の2つの放物線

$$C_1: y = -x^2, \quad C_2: y = x^2 + ax + b$$

が，点P$(t, -t^2)$において同じ接線ℓを持つとする．また，点PにおけるC_1の法線をmとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) ℓとmの方程式をそれぞれtを用いて表せ．

(2) a, bをそれぞれtを用いて表せ．

(3) mとC_2の軸およびC_2で囲まれる図形の面積S_1をtを用いて表せ．

(4) ℓとy軸の交点をQとし，三角形OPQの面積をS_2とするとき，極限$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{S_1}{S_2}$の値を求めよ．

(1) C_1において，$y' = -2x$

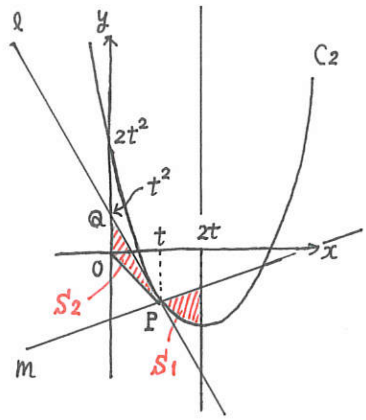
$\therefore \ell: y = -2t(x-t) - t^2$

$\therefore \underline{\ell: y = -2tx + t^2}$ //

$t>0$ と ℓの傾きが$-2t$より，mの傾きは，$\dfrac{1}{2t}$

$\therefore m: y = \dfrac{1}{2t}(x-t) - t^2$

$\therefore \underline{m: y = \dfrac{1}{2t}x - \dfrac{1}{2} - t^2}$ //



(2) C_2において，$y' = 2x + a$

$\therefore 2t + a = -2t$（ℓの傾き）　$\therefore \underline{a = -4t}$ //

C_2が点Pを通ることから，$-t^2 = t^2 - 4t^2 + b$　$\therefore \underline{b = 2t^2}$ //

(3) $C_2: y = (x-2t)^2 - 2t^2$

右図のようになる．

$$\therefore S_1 = \int_t^{2t} \frac{1}{2t}x - \frac{1}{2} - t^2 - (x^2 - 4tx + 2t^2)\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \left(2t + \frac{1}{4t}\right)x^2 - \left(\frac{1}{2} + 3t^2\right)x\right]_t^{2t}$$

$$= \underline{\frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{4}t}\ //$$

(4) $S_2 = \dfrac{1}{2}\cdot t^2 \cdot t = \dfrac{1}{2}t^3$

$$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{S_1}{S_2} = \lim_{t\to\infty}\frac{\frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{4}t}{\frac{1}{2}t^3} = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{4}{3} + \frac{1}{2t^2}\right) = \underline{\frac{4}{3}}\ //$$