

2014年 環境科学部・工学部 第3問

3 2次の正方行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  ( $a, b, c, d$ は実数とする) に対して, 2次方程式  $x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0$  は相異なる2つの実数解  $\alpha, \beta$ をもつとする. いま,

$$P = \frac{1}{\alpha - \beta}(A - \beta E), \quad Q = \frac{1}{\beta - \alpha}(A - \alpha E)$$

とおく. ただし,  $E$ は2次の単位行列である.

- (1)  $PQ = QP = O$ が成り立つことを示せ. ただし,  $O$ は2次の零行列である.
- (2)  $P + Q = E, P^2 = P$ および  $Q^2 = Q$ が成り立つことを示せ.
- (3)  $A = \alpha P + \beta Q$ が成り立つことを示せ.
- (4)  $A^n = \alpha^n P + \beta^n Q$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )が成り立つことを示せ.