東京大学

2014 年 第 1 問

$\boxed{1}$ 以下の問いに答えよ．

(1) t を実数の定数とする．実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を

$$f(x) = -2x^2 + 8tx - 12x + t^3 - 17t^2 + 39t - 18$$

と定める．このとき，関数 $f(x)$ の最大値を t を用いて表せ．

(2) (1) の「関数 $f(x)$ の最大値」を $g(t)$ とする．t が $t \geqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の範囲を動くとき，$g(t)$ の最小値を求めよ．

(1) $f(x)$ は x の 2 次関数であるから

$$f(x) = -2\{x^2 - (4t-6)x\} + t^3 - 17t^2 + 39t - 18$$

$$= -2\{x - (2t-3)\}^2 + 2(2t-3)^2 + t^3 - 17t^2 + 39t - 18$$

$$= -2\{x - (2t-3)\}^2 + t^3 - 9t^2 + 15t$$

より，$f(x)$ の最大値は $\underline{t^3 - 9t^2 + 15t}$ // （$x = 2t-3$ のとき）

(2) $g(t) = t^3 - 9t^2 + 15t$

$$g'(t) = 3t^2 - 18t + 15$$

$$= 3(t-1)(t-5)$$

t	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	$-\frac{18+31\sqrt{2}}{4}$	$\nearrow$	7	$\searrow$	-25	$\nearrow$

ここで，$-\dfrac{18+31\sqrt{2}}{4} > -\dfrac{18+31\times 2}{4}$

$$= -\frac{80}{4}$$

$$= -20$$

より $g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > g(5)$

$\therefore$ $g(t)$ の最小値は $g(5) = \underline{-25}$ //