龍谷大学

2012年 理系 第1問

$\boxed{1}$ 次の問いに答えなさい.

数理 石井K

(1) 関数 $y = \sin^2 x + 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x$ の最大値と最小値を求めなさい.

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{99} \log_{10}\frac{k}{k+1}$ を求めなさい.

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 (x+1)e^x\,dx$ を求めなさい.

(1) 半角の公式より, $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

倍角の公式より, $\sin 2x = 2\sin x\cos x$

$$\therefore\ y = \frac{1-\cos 2x}{2} + 2\sin 2x + 5\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$= 2\sin 2x + 2\cos 2x + 3$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\sin 2x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos 2x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 3$$

合成

$$= 2\sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 3$$

よって, y の最大値は $2\sqrt{2}+3$, 最小値は $-2\sqrt{2}+3$ //

(2) (与式) $= \log_{10}\dfrac{1}{2} + \log_{10}\dfrac{2}{3} + \log_{10}\dfrac{3}{4} + \cdots + \log_{10}\dfrac{99}{100}$

$$= \log_{10}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\cdots\frac{99}{100}\right)$$

$$\frac{1\cdot\boxed{2\cdot 3\cdots\cdots 99}}{\boxed{2\cdot 3\cdot 4\cdots 99}\cdot 100}$$

約分する

$$= \log_{10}\frac{1}{100}$$

$$= \log_{10} 10^{-2}$$

$$= -2 \quad //$$

(3) (与式) $= \displaystyle\int_0^1 (x+1)(e^x)'\,dx$

部分積分

$$= \Big[(x+1)e^x\Big]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx$$

$$= 2e - 1 - \Big[e^x\Big]_0^1$$

$$= e \quad //$$