0002065364397999

大阪市立大学

2015年 第2問

$\boxed{2}$ Oを原点とする座標空間において四面体OABCを考える．△ABCの重心をO′，△OBCの重心をA′，△OCAの重心をB′，△OABの重心をC′とする．次の問いに答えよ．

(1) 2つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{O'A'}}$ は平行であることを示せ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$ と $|\overrightarrow{\mathrm{O'A'}}|$ の比を求めよ．

(3) △OABと△O′A′B′は相似であることを示せ．

(4) AがP(1, 0, 0)とQ(0, 2, 0)を結ぶ線分の中点，BがQとR(0, 0, 3)を結ぶ線分の中点，CがRとPを結ぶ線分の中点であるとき，四面体OABCの体積 V と四面体O′A′B′C′の体積 V' を求めよ．

(1) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく

$\overrightarrow{OO'}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$, $\overrightarrow{OA'}=\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c})$

$$\therefore \overrightarrow{O'A'}=\overrightarrow{OA'}-\overrightarrow{OO'}$$
$$=-\frac{1}{3}\vec{a}$$
$$=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$$

∴ $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{O'A'}$ は平行である ▨

(2) (1)より．$|\overrightarrow{O'A'}|=\frac{1}{3}|\overrightarrow{OA}|$　∴ $\underline{|\overrightarrow{OA}|:|\overrightarrow{O'A'}|=3:1}$ //

(3) (1),(2)と同様の議論により．$|\overrightarrow{OB}|:|\overrightarrow{O'B'}|=3:1$, $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{OB'}-\overrightarrow{OA'}=-\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ より

$|\overrightarrow{AB}|:|\overrightarrow{A'B'}|=3:1$

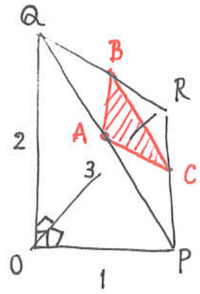
∴ △OABと△O′A′B′は相似である（相似比は 3：1） ▨

(4) $A\left(\frac{1}{2},1,0\right)$, $B\left(0,1,\frac{3}{2}\right)$, $C\left(\frac{1}{2},0,\frac{3}{2}\right)$

△ABCの面積は△PQRの $\frac{1}{4}$ 倍で

原点Oから下ろした垂線の長さは同じなので

O-ABCの体積はO-PQRの $\frac{1}{4}$ 倍である



$$\therefore V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot2\cdot1\cdot3\times\frac{1}{4}$$
$$=\underline{\frac{1}{4}}\ //$$

$$V'=V\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\underline{\frac{1}{108}}\ //$$