



2015年理系第4問

 数理  
石井K
4  $x \geq 1, y \geq 1$  の範囲で

$$k = (\log x)^2 (\log y)$$

 を考える.  $xy = e^3$  として次の問いに答えなさい.

- (1)  $k$  を  $x$  で表しなさい. また,  $x$  の取り得る値の範囲を求めなさい.  
 (2)  $x$  が (1) で求めた範囲を動くとき,  $k$  の最大値と最小値を求めなさい.

$$(1) y = \frac{e^3}{x} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} k &= (\log x)^2 \left( \log \frac{e^3}{x} \right) \\ &= (\log x)^2 (\log e^3 - \log x) \\ &= \underline{(\log x)^2 (3 - \log x)} // \end{aligned}$$

$$x \geq 1, y \geq 1, xy = e^3 \text{ より, } \underline{1 \leq x \leq e^3} //$$

$$(2) t = \log x \text{ とおく. } 1 \leq x \leq e^3 \text{ より, } 0 \leq t \leq 3$$

$$\begin{aligned} k &= t^2(3-t) \text{ より, } k' = -3t^2 + 6t \\ &= -3t(t-2) \end{aligned}$$

$$\therefore k' = 0 \text{ となるのは, } t = 0, 2$$

 $\therefore$  右の増減表と

$t$	0	...	2	...	3
$k'$	0	+	0	-	
$k$	0	↗	4	↘	0

$$t=0 \Leftrightarrow x=1, t=3 \Leftrightarrow x=e^3, t=2 \Leftrightarrow x=e^2$$

より,

 $k$  の最大値は 4 ( $x=e^2, y=e$  のとき),

 最小値は 0 ( $x=1, y=e^3$  または  $x=e^3, y=1$  のとき)

—— //