0001353186468999

琉球大学

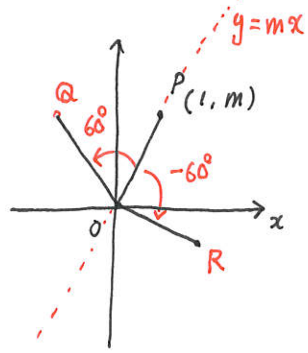
2013年 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ mを正の定数とする．次の問いに答えよ．

(1) xy平面上に2点O(0, 0)，P(1, m)がある．このとき2点Q，Rの座標を，△OPQ，△OPRがともに正三角形となるように定めよ．ただし，点Qはxy平面上の$y > mx$となる領域に，点Rはxy平面上の$y < mx$となる領域に定めよ．

(2) (1)で定めた3点P，Q，Rについて，一次変換fは点Pを同じ点Pに，点Qを点Rに移すものとする．この一次変換fを表す行列Aを求めよ．



(1) Q(x, y)とおくと．Pを原点のまわりに60°回転させたものなので

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60° & -\sin 60° \\ \sin 60° & \cos 60° \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}m \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}m \end{pmatrix} \qquad \therefore \underline{Q\left(\frac{1-\sqrt{3}m}{2}, \frac{\sqrt{3}+m}{2}\right)} //$$

同様にしてR(x', y')も

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-60°) & -\sin(-60°) \\ \sin(-60°) & \cos(-60°) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}m \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}m \end{pmatrix} \qquad \therefore \underline{R\left(\frac{1+\sqrt{3}m}{2}, \frac{-\sqrt{3}+m}{2}\right)} //$$

(2) P → Pより．$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$とおくと．

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \qquad \therefore a + bm = 1 \cdots ①,\ c + dm = m \cdots ②$$

Q → Rより

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{3}m}{2} \\ \frac{\sqrt{3}+m}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}m}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}+m}{2} \end{pmatrix} \qquad \therefore \begin{cases} (1-\sqrt{3}m)a + (\sqrt{3}+m)b = 1+\sqrt{3}m \cdots ③ \\ (1-\sqrt{3}m)c + (\sqrt{3}+m)d = -\sqrt{3}+m \cdots ④ \end{cases}$$

①,③より．$a = \frac{1-m^2}{1+m^2}$，$b = \frac{2m}{1+m^2}$，②,④より $c = \frac{2m}{1+m^2}$，$d = \frac{m^2-1}{1+m^2}$

$$\therefore A = \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix} //$$