2015年 理系 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 関数 $f(x) = |x|\sqrt{1-x^2}$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の増減を調べ，最大値，最小値を求めよ．

(2) 定積分 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ を求めよ．

(1) $f(-x) = |-x|\sqrt{1-(-x)^2}$

$= |x|\sqrt{1-x^2}$

$= f(x)$

$\therefore f(x)$ は偶関数であるから．$0 \leqq x \leqq 1$ のときを調べる．

このとき．$f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ より．$f'(x) = \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{1}{2} \cdot (-2x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore f'(x) = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad \therefore 0 \leqq x \leqq 1$ で $f'(x) = 0$ となるのは．$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

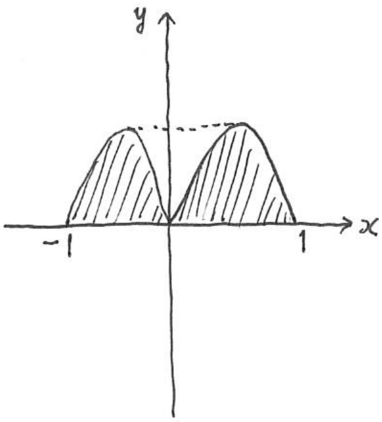
$\therefore$ 右の増減表となる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

$-1 \leqq x < 0$ のときも考えると．

最大値 $\frac{1}{2}$ $\left(x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\text{ のとき}\right)$，最小値 0 $(x = 0, \pm 1)$ //

(2) (与式) $= 2\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$



$x = \sin t$ とおいて置換積分する．

x	$0 \to 1$
t	$0 \to \frac{\pi}{2}$

，$dx = \cos t \cdot dt$

$\therefore$ (与式) $= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^2 t\,dt$

$= -\frac{2}{3}\left[\cos^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{2}{3}$ //