琉球大学

2016年 理系 第2問

数理 石井K

2 定積分 $\int_a^{a+1} |e^x - 1|\,dx$ の値を $I(a)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $-1 \leqq a \leqq 0$ のとき，$I(a)$ を a で表せ．

(2) a が実数全体を動くとき，$I(a)$ を最小にするような a の値を求めよ．

(1) $-1 \leqq a \leqq 0$ のとき，$0 \leqq a+1 \leqq 1$ であるから，

$x \leqq 0$ のとき $e^x - 1 \leqq 0$，$x \geqq 0$ のとき $e^x - 1 \geqq 0$ により，

$$I(a) = \int_a^0 1 - e^x\,dx + \int_0^{a+1} e^x - 1\,dx$$
$$= \left[x - e^x\right]_a^0 + \left[e^x - x\right]_0^{a+1}$$
$$= -1 - a + e^a + e^{a+1} - (a+1) - 1$$
$$= \underline{e^{a+1} + e^a - 2a - 3}\ /\!/$$

(2) $a < -1$ のとき $I(a) = \int_a^{a+1} 1 - e^x\,dx = \left[x - e^x\right]_a^{a+1} = a+1-e^{a+1}-a+e^a = e^a - e^{a+1} + 1$

よって，$I'(a) = e^a - e^{a+1} = e^a(1-e) < 0$

$a > 0$ のとき，$I(a) = \int_a^{a+1} e^x - 1\,dx = \left[e^x - x\right]_a^{a+1} = e^{a+1} - a - 1 - e^a + a = e^{a+1} - e^a - 1$

よって，$I'(a) = e^{a+1} - e^a = e^a(e-1) > 0$

$-1 \leqq a \leqq 0$ のとき，$I'(a) = e^{a+1} + e^a - 2$

$\therefore$ $I'(a) = 0$ となるのは，$e^a(e+1) = 2 \iff e^a = \dfrac{2}{e+1}$

$\iff a = \log\dfrac{2}{e+1}$ のとき．

以上より，増減表は下のようになる．

a	$\cdots$	$\log\frac{2}{e+1}$	$\cdots$	
$I'(a)$	$-$	0	$+$	
$I(a)$	↘		↗	

$\therefore$ $I(a)$ を最小にする a の値は，$\underline{a = \log\dfrac{2}{e+1}}\ /\!/$