2014年 医学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ mは正の整数とする．箱の中に，1と書かれたカードが1枚，2と書かれたカードが2枚，3と書かれたカードが3枚，…，$2m$と書かれたカードが$2m$枚入っている．この箱の中から，1枚のカードを取り出し，書かれている数字を記録してからもとに戻す操作をn回繰り返す．

(1) 箱の中にカードは全部で

$m(\boxed{ア}m+\boxed{イ})$枚

入っている．

(2) $n=1$のとき，偶数のカードを取り出す確率は

$$\frac{m+\boxed{ウ}}{\boxed{エ}m+\boxed{オ}}$$

である．

また，$n=2$のとき，記録した2個の数の和が偶数である確率は

$$\frac{\boxed{カ}m^2+\boxed{キ}m+\boxed{ク}}{\boxed{ケ}m^2+\boxed{コ}m+\boxed{サ}}$$

である．

(3) 記録したn個の数の和が偶数である確率をp_nとする．p_nをm，nを用いて表すと

$$p_n=\frac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}\left(\frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}m+\boxed{タ}}\right)^n+\frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}$$

である．

ア 2, イ 1, ウ 1, エ 2, オ 1, カ 2, キ 2, ク 1, ケ 4, コ 4, サ 1, シ 1, ス 2, セ 1, ソ 2, タ 1, チ 1, ツ 2

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2m}k=\frac{1}{2}\cdot 2m(2m+1)=\underline{m(2m+1)}$ //

(2) 偶数のカードの枚数は

$$\sum_{k=1}^{m}2k=m(m+1)$$

$$\therefore\ \frac{m(m+1)}{m(2m+1)}=\underline{\frac{m+1}{2m+1}}\ //$$

(3) (i) 偶＋偶 $\left(\dfrac{m+1}{2m+1}\right)^2$

(ii) 奇＋奇 $\left(\dfrac{m}{2m+1}\right)^2$

(i), (ii)より．$\dfrac{(m+1)^2+m^2}{(2m+1)^2}=\underline{\dfrac{2m^2+2m+1}{4m^2+4m+1}}$ //

$$p_{n+1}=p_n\cdot\frac{m+1}{2m+1}+(1-p_n)\cdot\frac{m}{2m+1}$$

$$=\frac{1}{2m+1}p_n+\frac{m}{2m+1}$$

$$\therefore\ p_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2m+1}\left(p_n-\frac{1}{2}\right)$$

∴数列$\left\{p_n-\frac{1}{2}\right\}$は初項$\dfrac{m+1}{2m+1}-\dfrac{1}{2}$，公比$\dfrac{1}{2m+1}$の等比数列

$$\therefore\ p_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2(2m+1)}\cdot\left(\frac{1}{2m+1}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ \underline{p_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2m+1}\right)^n}\ //$$