

2016年工学部第1問


 数理
石井K

1 $a > 0$ とする. $x > 0$ で定義された関数 $y = x^2 + ax - 3a^2 \log x$ のグラフが x 軸と共有点をもつような a の範囲を求めよ.

$$\begin{aligned} y' &= 2x + a - \frac{3a^2}{x} \\ &= \frac{2x^2 + ax - 3a^2}{x} \\ &= \frac{(2x + 3a)(x - a)}{x} \end{aligned}$$

x	(0)	\cdots	a	\cdots	(∞)
y'		$-$		$+$	
y	(∞)	\searrow		\nearrow	

$y' = 0$ となるのは, $x > 0, a > 0$ より, $x = a$ のとき

増減表より, 最小値は $2a^2 - 3a^2 \log a$

\therefore x 軸と共有点をもつのは,

$$2a^2 - 3a^2 \log a \leq 0 \text{ のとき}$$

$$\therefore a^2(2 - 3 \log a) \leq 0$$

$a > 0$ より, $a^2 > 0$ であるから, $2 - 3 \log a \leq 0$

$$\therefore \log a \geq \frac{2}{3}$$

$$\therefore \underline{a \geq e^{\frac{2}{3}}}$$