尾道市立大学

2014年 経済情報 第1問

1 次の問いに答えなさい．

(1) 不等式 $|3x-1|+|x-2| \geqq 11$ を解きなさい．

(2) $x>0$ のとき，次の式の最小値，および最小値を与える x の値を求めなさい．

$$3x+1+\frac{4}{3x+1}$$

(3) x, y を正の実数とする．このとき次の不等式が成り立つことを証明しなさい．

$$(x+y+1)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+1\right) \geqq 9$$

(1) (i) $x \leqq \frac{1}{3}$ のとき

$1-3x+2-x \geqq 11$

$\therefore x \leqq -2$

(ii) $\frac{1}{3} < x < 2$ のとき

$3x-1+2-x \geqq 11$

$\therefore x \geqq 5$ 場合分けの条件をみたさず不適

(iii) $x \geqq 2$ のとき

$3x-1+x-2 \geqq 11$

$x \geqq \frac{7}{2}$

(i)〜(iii)より. $\underline{x \leqq -2,\ \frac{7}{2} \leqq x}$ //

(2) $x>0$ のとき $3x+1>0$, $\frac{4}{3x+1}>0$ であるから

相加・相乗平均の関係より

$$3x+1+\frac{4}{3x+1} \geqq 2\sqrt{(3x+1)\cdot\frac{4}{3x+1}} = 4$$

等号成立は. $3x+1=\frac{4}{3x+1} \iff (3x+1)^2=4$

$3x+1>0$ より. $3x+1=2$ $\therefore x=\frac{1}{3}$

以上より. $\underline{最小値 4 \ (x=\frac{1}{3} のとき)}$ //

(3) $(左辺) = 1+\frac{x}{y}+x+\frac{y}{x}+1+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+1$

$$= 3+\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right)+\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)$$

$x>0$, $y>0$ であるから

相加・相乗平均の関係より

$x+\frac{1}{x} \geqq 2$, $y+\frac{1}{y} \geqq 2$,

$\frac{y}{x}+\frac{x}{y} \geqq 2$

等号成立はそれぞれ

$x=1$, $y=1$, $x=y$ であるから

同時に等号が成り立つのは

$x=y=1$ のとき.

以上より

$(左辺) \geqq 3+2+2+2 = 9$

等号成立は $x=y=1$ のとき ▨