

2015年工学部第2問

数理
石井K

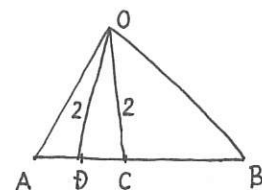
2 $\triangle OAB$ において、辺 AB の中点を C 、辺 AB を $1:3$ に内分する点を D とする。 $|\vec{OC}| = 2$ 、 $|\vec{OD}| = 2$ 、 $\angle COD = 60^\circ$ とするとき、次の空所を埋めよ。

(1) \vec{OC} 、 \vec{OD} を、 \vec{OA} 、 \vec{OB} を用いて表すと、 $\vec{OC} = \boxed{\text{ア}}$ $\vec{OA} + \boxed{\text{イ}}$ \vec{OB} 、 $\vec{OD} = \boxed{\text{ウ}}$ $\vec{OA} + \boxed{\text{エ}}$ \vec{OB} である。

(2) \vec{OA} 、 \vec{OB} を、 \vec{OC} 、 \vec{OD} を用いて表すと、 $\vec{OA} = \boxed{\text{オ}}$ $\vec{OC} + \boxed{\text{カ}}$ \vec{OD} 、 $\vec{OB} = \boxed{\text{キ}}$ $\vec{OC} + \boxed{\text{ク}}$ \vec{OD} である。

(3) $|\vec{OA}| = \boxed{\text{ケ}}$ であり、 $|\vec{OB}| = \boxed{\text{コ}}$ である。

(4) $\triangle OAB$ の面積は $\boxed{\text{サ}}$ である。



$$(1) \vec{OC} = \frac{1}{2} \vec{OA} + \frac{1}{2} \vec{OB} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\vec{OD} = \frac{3}{4} \vec{OA} + \frac{1}{4} \vec{OB} \quad \dots \textcircled{2}$$

(2) ① - ② $\times 2$ より。

$$\vec{OC} - 2\vec{OD} = -\vec{OA} \quad \therefore \vec{OA} = -\vec{OC} + 2\vec{OD} \quad \dots \textcircled{3}$$

これを①に代入して。

$$\vec{OC} = -\frac{1}{2} \vec{OC} + \vec{OD} + \frac{1}{2} \vec{OB} \quad \therefore \vec{OB} = 3\vec{OC} - 2\vec{OD} \quad \dots \textcircled{4}$$

$$(3) \textcircled{3} \text{ より、} |\vec{OA}|^2 = |\vec{OC}|^2 + 4|\vec{OD}|^2 - 4|\vec{OC}||\vec{OD}|\cos 60^\circ = \vec{OC} \cdot \vec{OD}$$

$$= 4 + 4 \cdot 4 - 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 12$$

$$\therefore |\vec{OA}| = 2\sqrt{3}$$

$$\textcircled{4} \text{ より、} |\vec{OB}|^2 = 9|\vec{OC}|^2 + 4|\vec{OD}|^2 - 12|\vec{OC}||\vec{OD}|\cos 60^\circ$$

$$= 36 + 16 - 24$$

$$= 28$$

$$\therefore |\vec{OB}| = 2\sqrt{7}$$

$$(4) \textcircled{3} \textcircled{4} \text{ より、} \vec{OA} \cdot \vec{OB} = (-\vec{OC} + 2\vec{OD}) \cdot (3\vec{OC} - 2\vec{OD})$$

$$= -3|\vec{OC}|^2 + 8|\vec{OC}||\vec{OD}|\cos 60^\circ - 4|\vec{OD}|^2$$

(4)の別解 ↖ こっちが楽だった

$$\triangle ODC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\triangle OAB = 4 \times \triangle ODC = 4\sqrt{3}$$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{OA}|^2 |\vec{OB}|^2 - (\vec{OA} \cdot \vec{OB})^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{12 \cdot 28 - (-12)^2}$$

$$= 4\sqrt{3}$$