



2015年文系第1問

 数理  
石井K

1  $n$  を 2 以上の自然数とし, 1 から  $n$  までの自然数  $k$  に対して, 番号  $k$  をつけたカードをそれぞれ  $k$  枚用意する. これらすべてを箱に入れ, 箱の中から 2 枚のカードを同時に引くとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 用意したカードは全部で何枚か答えよ.
- (2) 引いたカード 2 枚の番号が両方とも  $k$  である確率を  $n$  と  $k$  の式で表せ.
- (3) 引いたカード 2 枚の番号が一致する確率を  $n$  の式で表せ.
- (4) 引いたカード 2 枚の番号が異なっている確率を  $p_n$  とする. 不等式  $p_n \geq 0.9$  を満たす最小の自然数  $n$  の値を求めよ.

(1) 求める枚数を  $N$  とおくと.

$$\begin{aligned} N &= 1 + 2 + 3 + \dots + n \\ &= \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{1}{2}n(n+1) \text{ 枚} \end{aligned}$$

(4) (3) の  $g_n$  を用いると.  $p_n = 1 - g_n$  より

$$\begin{aligned} 1 - \frac{4}{3(n+2)} &\geq 0.9 \\ \therefore 0.3n &\geq 3.4 \\ n &\geq 11.33\dots \end{aligned}$$

よって, 最小の自然数  $n$  は  $n=12$  //

(2) すべての引き方は  $NC_2$  通り

このうち, ともに  $k$  である引き方は,  $k \geq 2$  のときは,

$kC_2$  通り.

$$\text{よって, 確率は } \frac{kC_2}{NC_2} = \frac{k(k-1)}{N(N-1)} = \frac{4k(k-1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)} \quad (k \geq 2)$$

$k=1$  のとき, 0. これは  $k \geq 2$  の場合の式に含まれる

$$\text{以上より, } \frac{4k(k-1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)} //$$

(3) (2) の確率をすべての  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) について足せばよいので

求める確率を  $g_n$  とおくと,

$$\begin{aligned} g_n &= \sum_{k=1}^n \frac{4k(k-1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{4}{(n-1)n(n+1)(n+2)} \sum_{k=1}^n (k^2 - k) \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{(n-1)n(n+1)(n+2)} \left\{ \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1) \right\}$$

$$= \frac{4}{3(n+2)} //$$