大阪大学

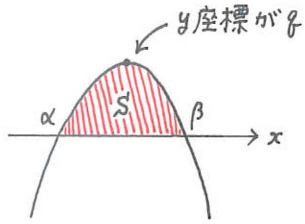
2017年 文系 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ b, c を実数，q を正の実数とする．放物線 $P : y = -x^2 + bx + c$ の頂点の y 座標が q のとき，放物線 P と x 軸で囲まれた部分の面積 S を q を用いてあらわせ．

P と x 軸との交点の x 座標を α, β $(\alpha < \beta)$ とおくと，解と係数の関係より，

$\alpha + \beta = b$, $\alpha\beta = -c$ $\cdots$ $(*)$ となる．



$$S = \int_\alpha^\beta -x^2 + bx + c \, dx$$

$$= -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta) \, dx$$

$\frac{1}{6}$公式

$$= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \quad \cdots (**)$$

ここで $(*)$ を使うと，

$$(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$= b^2 + 4c$$

$\therefore$ $\beta - \alpha > 0$ より，$\beta - \alpha = \sqrt{b^2 + 4c}$

$y = -(x - \frac{1}{2}b)^2 + \frac{1}{4}b^2 + c$ となるので，$q = \frac{1}{4}b^2 + c$

$\therefore$ $\beta - \alpha = 2\sqrt{q}$

$(**)$ に代入して，

$$\underline{S = \frac{4}{3}q\sqrt{q}}$$ //