

2015年理系第4問

4  $t$  を媒介変数として、 $x = t + \frac{1}{t} + \frac{5}{2}$ ,  $y = 2t - \frac{2}{t}$  で表される曲線を考える。次の問いに答えよ。

(1)  $t$  を消去して、 $x$  と  $y$  の関係式を求めよ。

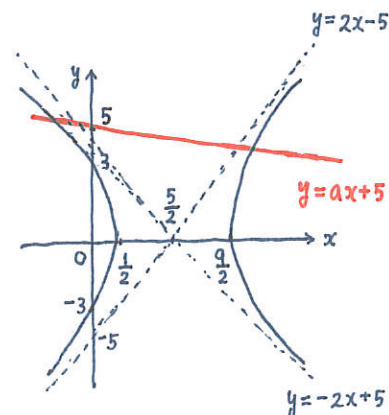
(2)  $a$  を定数とするとき、直線  $y = ax + 5$  とこの曲線との共有点の個数を調べよ。

$$(1) \quad t + \frac{1}{t} = x - \frac{5}{2} \quad \text{より 両辺 2乗して.} \quad t^2 + \frac{1}{t^2} + 2 = x^2 - 5x + \frac{25}{4} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$t - \frac{1}{t} = \frac{y}{2} \quad \text{より. 両辺 2乗して.} \quad t^2 + \frac{1}{t^2} - 2 = \frac{1}{4} y^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \quad \text{より.} \quad 4 = x^2 - 5x + \frac{25}{4} - \frac{1}{4} y^2$$

$$\therefore \frac{(x - \frac{5}{2})^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$$



(2) (1) の式に  $y = ax + 5$  を代入して整理すると、

$$(4 - a^2)x^2 - 10(2 + a)x - 16 = 0 \quad \dots (*)$$

(i)  $a = 2$  のとき

(\*) は  $x = -\frac{2}{5}$  となり 共有点は 1 個

(ii)  $a = -2$  のとき

$-16 = 0$  となり. 共有点 0 個.

(iii)  $a \neq \pm 2$  のとき

(\*) の判別式を  $D$  とすると.

$$D/4 = 25(2+a)^2 + (4-a^2) \cdot 16$$

$$= 9a^2 + 100a + 164$$

$$= (9a + 82)(a + 2)$$

$\therefore D > 0$  となるのは.  $a < -\frac{82}{9}$ ,  $-2 < a < 2$ ,  $2 < a$

$D = 0$  となるのは.  $a = -\frac{82}{9}$

$D < 0$  となるのは.  $-\frac{82}{9} < a < -2$

(i) ~ (iii) より.

$a < -\frac{82}{9}$ ,  $-2 < a < 2$ ,  $2 < a$  のとき. 2 個.  $a = -\frac{82}{9}$ ,  $2$  のとき 1 個,  $-\frac{82}{9} < a \leq -2$  のとき 0 個