0002267722377999

琉球大学

2016年 文系 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ.

$2 \times +7$
3×-5

(1) 整式 $P(x)$ は，$P\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{8}{3}$ と $P\left(-\frac{7}{2}\right)=-\frac{5}{2}$ を満たす．$P(x)$ を $6x^2+11x-35$ で割った余りを求めよ．

(2) 座標空間内の3点 A(3, 0, 0)，B(0, 3, 0)，C(1, s, t) を頂点とする三角形 ABC の重心を G，原点を O とする．OG ⊥ AG，OG ⊥ AB となるときの s と t の値を求めよ．

(3) 変量 x の値が x_1，x_2，x_3 のとき，その平均値を $\overline{x}$ とする．分散 s^2 を

$$\frac{1}{3}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+(x_3-\overline{x})^2\}$$

で定義するとき，$s^2=\overline{x^2}-(\overline{x})^2$ となることを示せ．ただし $\overline{x^2}$ は $x_1{}^2$，$x_2{}^2$，$x_3{}^2$ の平均値を表す．

(1) $P(x)$ を $6x^2+11x-35$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とおくと，

$6x^2+11x-35=(2x+7)(3x-5)$ であるから，

$P(x)=(2x+7)(3x-5)\cdot Q(x)+ax+b \quad \cdots ①$

$P\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{8}{3}$ より，①に $x=\frac{5}{3}$ を代入して，$\frac{5}{3}a+b=\frac{8}{3} \quad \cdots ②$

$P\left(-\frac{7}{2}\right)=-\frac{5}{2}$ より，①に $x=-\frac{7}{2}$ を代入して，$-\frac{7}{2}a+b=-\frac{5}{2} \quad \cdots ③$

②−③より，$\left(\frac{5}{3}+\frac{7}{2}\right)a=\frac{8}{3}+\frac{5}{2}$ $\quad \therefore a=1$ これを②に代入して，$b=1$

$\therefore$ 余りは，$x+1$ //

(2) $\overrightarrow{OG}=\left(\frac{3+0+1}{3}, \frac{0+3+s}{3}, \frac{0+0+t}{3}\right)=\left(\frac{4}{3}, \frac{s+3}{3}, \frac{t}{3}\right)$，$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA}=\left(-\frac{5}{3}, \frac{s+3}{3}, \frac{t}{3}\right)$，

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-3, 3, 0)$ であり，

OG ⊥ AG より，$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AG}=0$ なので $\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AG}=-\frac{20}{9}+\left(\frac{s}{3}+1\right)^2+\frac{t^2}{9}=0$

これより，$s^2+t^2+6s=11 \quad \cdots ④$

OG ⊥ AB より，$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ なので，$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AB}=-4+s+3=0 \quad \therefore s=1 \quad \cdots ⑤$

④，⑤より，$s=1$，$t=\pm 2$ //

(3) $s^2=\frac{1}{3}\left\{x_1^2+x_2^2+x_3^2+3(\overline{x})^2-2\overline{x}(x_1+x_2+x_3)\right\}$

$=\frac{1}{3}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+(\overline{x})^2-2\overline{x}\cdot\overline{x}$

$=\overline{x^2}+(\overline{x})^2-2(\overline{x})^2$

$=\overline{x^2}-(\overline{x})^2$ ▨