琉球大学

2017年 文系 第1問

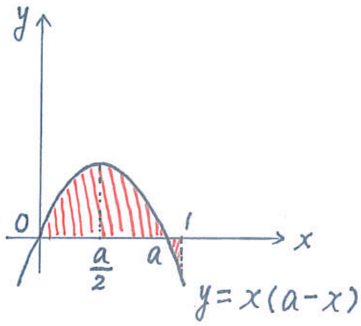
$\boxed{1}$ $0 \leqq a \leqq 1$とし，$f(a)=\int_0^1 |x(a-x)|\,dx$とする．次の問いに答えよ．

(1) 定積分$\int_0^1 x(1-x)\,dx$を求めよ．

(2) $f(a)$をaの関数として表せ．

(3) $f(a)$の最大値と最小値を求めよ．また，そのときのaの値をそれぞれ求めよ．

(1)
$$\int_0^1 x(1-x)\,dx = \int_0^1 x - x^2\,dx$$
$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$
$$= \underline{\frac{1}{6}}\ //$$



(2) $f(a)$は右図の斜線部分の面積より．

$$f(a) = \int_0^a x(a-x)\,dx + \int_a^1 -x(a-x)\,dx$$
$$= \left[\frac{a}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^a + \left[-\frac{a}{2}x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_a^1$$
$$= \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{3}a^3 - \frac{a}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{3}a^3$$
$$= \underline{\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}}\ //$$

(3)
$$f'(a) = a^2 - \frac{1}{2}$$
$$= \left(a + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(a - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

a	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	$\frac{1}{3}$	↘	$\frac{2-\sqrt{2}}{6}$	↗	$\frac{1}{6}$

増減表より．

$\underline{\text{最大値}\ \frac{1}{3}\ (a=0\text{のとき})，\text{最小値}\ \frac{2-\sqrt{2}}{6}\ \left(a=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{のとき}\right)}$ //