琉球大学

2014年 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ a, b, c, d は $a+d=0$, $ad-bc=1$ をみたす実数とし, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする. 次の問いに答えよ.

(1) $A^2=-E$ を示せ.

(2) p, q は実数で $p^2+q^2 \neq 0$ をみたすとする. 実数 x, y に対して $(pA+qE)(xA+yE)=E$ が成り立つとき, x, y を p, q で表せ.

(3) θ を実数とする. すべての正の整数 n に対して

$$\{(\cos\theta)E+(\sin\theta)A\}^n=(\cos n\theta)E+(\sin n\theta)A$$

が成り立つことを, 数学的帰納法を用いて証明せよ. ここで, $(\sin\theta)A$ は行列 A の $\sin\theta$ 倍を表す.

(1) $A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} \underset{a+d=0より}{=} \begin{pmatrix} a^2+ad-1 & 0 \\ 0 & d^2+ad-1 \end{pmatrix} \underset{a+d=0,\ ad-bc=1より.}{=} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$ ■

(2) $pxA^2+pyA+qxA+qyE=E$

$\therefore (qy-px-1)E+(py+qx)A=O$

$a+d=0$ より. AはEの実数倍ではない. $\therefore \begin{cases} px-qy=-1 & \cdots ① \\ qx+py=0 & \cdots ② \end{cases}$

①$\times p$ + ②$\times q$ より. $(p^2+q^2)x=-p$ 　 $p^2+q^2\neq 0$ より $x=\dfrac{-p}{p^2+q^2}$ //

①$\times q$ − ②$\times p$ より. $-(p^2+q^2)y=-q$ 　 $y=\dfrac{q}{p^2+q^2}$ //

(3) (i) $n=1$ のとき. $(\cos\theta)E+(\sin\theta)A=(\cos\theta)E+(\sin\theta)A$ となり成り立つ

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると, $\{(\cos\theta)E+(\sin\theta)A\}^k=(\cos k\theta)E+(\sin k\theta)A$

$\therefore \{(\cos\theta)E+(\sin\theta)A\}^{k+1}=\{(\cos\theta)E+(\sin\theta)A\}\{(\cos k\theta)E+(\sin k\theta)A\}$

$=(\cos\theta\cos k\theta)E+(\sin k\theta\cos\theta)A+(\cos k\theta\sin\theta)A+(\sin\theta\sin k\theta)A^2$

(1) より. $=(\cos\theta\cos k\theta-\sin\theta\sin k\theta)E+(\sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta)A$

$=\{\cos(k+1)\theta\}E+\{\sin(k+1)\theta\}A$

$\therefore n=k+1$ のときも成り立つ　(i), (ii) より. すべての正の整数 n に対して成り立つ ■