0002001458997999

琉球大学

2015年 理系 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 確率 p $(0<p<1)$ で「当たり」が出るくじを繰り返して引く．2回目の「当たり」が出たときにこの試行を終える．$n \geqq 2$ として，n 回目でこの試行を終える確率を p_n とする．次の問いに答えよ．

(1) p_2，p_3，p_4 を求めよ．

(2) p_n を求めよ．

(3) $N \geqq 2$ として，$\displaystyle\sum_{k=2}^{N} p_k$ を求めよ．

(1) $\underline{P_2 = p^2}$ //，$P_3 = p^2(1-p)\cdot {}_2C_1 = \underline{2p^2(1-p)}$ //，$P_4 = p^2(1-p)^2 \cdot {}_3C_1 = \underline{3p^2(1-p)^2}$ //

(2) $1 \sim (n-1)$ 回目の中で当たりが1回出て，n 回目に当たりが出るので

$P_n = p^2(1-p)^{n-2} \cdot {}_{n-1}C_1$　　$\therefore \underline{P_n = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}}$ //

(3) $P_N = \displaystyle\sum_{k=2}^{N} P_k$ $(N \geqq 2)$ とおくと，

$$P_N = p^2 + 2p^2(1-p) + 3p^2(1-p)^2 + \cdots + (N-2)p^2(1-p)^{N-3} + (N-1)p^2(1-p)^{N-2}$$

$$(1-p)P_N = p^2(1-p) + 2p^2(1-p)^2 + \cdots + (N-3)p^2(1-p)^{N-3} + (N-2)p^2(1-p)^{N-2} + (N-1)p^2(1-p)^{N-1}$$

$\therefore$ 上式から下式を引いて，

$$p \cdot P_N = \underbrace{p^2 + p^2(1-p) + p^2(1-p)^2 + \cdots + p^2(1-p)^{N-2}}_{\text{初項 } p^2,\ \text{公比 } (1-p) \text{ の等比数列の和}} - (N-1)p^2(1-p)^{N-1}$$

$$\therefore p \cdot P_N = \frac{p^2\{1-(1-p)^{N-1}\}}{1-(1-p)} - (N-1)p^2(1-p)^{N-1}$$

$$\therefore P_N = 1-(1-p)^{N-1} - (N-1)p(1-p)^{N-1}$$

$$= \underline{1-(1-p+pN)(1-p)^{N-1}} \ //$$