



2015年教育・農・理(生物, 地球) 第4問

4 1つのコマと下の図のような3つのマス目A, B, Cがある。コマがAまたはBにあるとき, さいころを投げて出た目の数だけCの方向にコマを進める。ただし, コマが途中でCやAに来たら, 逆の方向に折り返して進める。これを1回の操作とする。AまたはBで止まった場合はその止まったマス目から操作を繰り返す, Cに止まった場合は操作を終了する。例えば, Aにコマがあり3の目が出たら $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow B$ とコマを進め, 続けて操作を繰り返したとき5の目が出たら $B \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$ と進めて操作を終了する。

最初にコマをAに置いて操作を始めるとき, 次の問いに答えよ。

A	B	C
---	---	---

- (1) 1回の操作で終了する確率 p_1 を求めよ。
 (2) 2回の操作で終了する確率 p_2 を求めよ。
 (3) n 回の操作で終了する確率 p_n を n を用いて表せ。

(1) 2または6の目が出れば終了する。

$$\therefore p_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} //$$

(2) 2回の操作で終了するのは, $(1, 1), (1, 5), (3, 1), (3, 5), (4, 2), (4, 6), (5, 1), (5, 5)$

$$\text{の8通り} \quad \therefore p_2 = \frac{8}{6^2} = \frac{2}{9} //$$

(3) n 回以下の操作で終了する確率を g_n とおくと, n 回目にA, B いずれにいても $n+1$ 回目に終了するのは,

$$g_{n+1} = g_n + \underbrace{(1-g_n)}_{\substack{\text{n+1回以下} \\ \text{で終了}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{3}}_{\substack{\text{n回以下} \\ \text{で終了}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{3}}_{\substack{\text{ちょうどn+1回目} \\ \text{で終了}}} \quad \text{そのうちの} \frac{1}{3} \text{であるから。}$$

$$\text{よって, } g_{n+1} = \frac{2}{3}g_n + \frac{1}{3}$$

$$\therefore g_{n+1} - 1 = \frac{2}{3}(g_n - 1)$$

\therefore 数列 $\{g_n - 1\}$ は初項 $g_1 - 1 = p_1 - 1 = -\frac{2}{3}$, 公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列

$$\therefore g_n - 1 = -\left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \therefore g_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

ここで, $p_n = g_n - g_{n-1}$ ($n=2, 3, \dots$) より

$$p_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \text{これは } n=1 \text{ のときも成り立っている。}$$