0002264095377999

佐賀大学

2016年 理工学部 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ $0 < p < 1$ とする．

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} = (1-p)a_{n+1} + pa_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ に対して，次の問に答えよ．

(1) $b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．
(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．
(3) 極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(1) $a_{n+2} - a_{n+1} = -p(a_{n+1} - a_n)$ と変形できるから，

$b_{n+1} = -pb_n$

∴ 数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = a_2 - a_1 = 1$，公比 $-p$ の等比数列

∴ $\underline{b_n = (-p)^{n-1}}$ //

(2) (1)より，$a_{n+1} - a_n = (-p)^{n-1}$

階差数列の公式より，$n \geqq 2$ のとき．

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-p)^{k-1}$$

$$= 1 + \frac{1-(-p)^{n-1}}{1-(-p)} \quad (0<p<1 \text{ より，等比数列の和の公式を使った})$$

$$= \frac{2+p-(-p)^{n-1}}{1+p}$$

これは．$n=1$ のときも成り立っている

$$\therefore \underline{a_n = \frac{2+p-(-p)^{n-1}}{1+p} \quad (n=1,2,\cdots)}$$ //

(3) (2)より，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2+p-(-p)^{n-1}}{1+p}$$

← $n\to\infty$ のとき．
$(-p)^{n-1} \to 0$

$$= \underline{\frac{2+p}{1+p}} \quad (\because 0<p<1 \text{ より})$$ //