

2010年 法学部 第1問


1 n が2以上の自然数のとき,(注) 2^{2^n} は2の 2^n 個の積を表す.

$$2^{2^n} - 6$$

は10で割り切れることを示せ.

数学的帰納法で示す.

(i) $n=2$ のとき.

$$2^{2^2} - 6 = 2^4 - 6 = 10 \quad \therefore 10 \text{ で割り切れる}$$

(ii) $n=k$ のとき 成り立つと仮定すると.

$$2^{2^k} - 6 = 10m \quad (m: \text{整数}) \text{ と表せるので}$$

$$2^{2^k} = 10m + 6 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{このとき} \quad 2^{2^{k+1}} = 2^{2^k} \cdot 2^{2^k}$$

$$= (10m + 6)^2$$

$$\therefore 2^{2^{k+1}} - 6 = (10m + 6)^2 - 6$$

$$= 100m^2 + 120m + 30$$

$$= 10(10m^2 + 12m + 3)$$

 $\therefore 10m^2 + 12m + 3$ は整数より、右辺は10の倍数.

$$\therefore 2^{2^{k+1}} - 6 \text{ は } 10 \text{ で割り切れる}$$

 $\therefore n = k + 1$ のとき成り立つ(i), (ii)より、 $2^{2^n} - 6$ は $n \geq 2$ のとき、10で割り切れる \square