

2011年第5問

5 等式  $f(x) = 1 + x \int_0^1 t f(t-1) dt$  をみたす関数  $f(x)$  を求めよ.

$$a = \int_0^1 t f(t-1) dt \quad \text{とおくと,}$$

$$f(x) = 1 + ax \quad \text{と表せば}$$

$$\text{よって, } a = \int_0^1 t \cdot \{1 + a(t-1)\} dt$$

$$= \int_0^1 t(1-a) + at^2 dt$$

$$= \left[ \frac{1-a}{2} t^2 + \frac{a}{3} t^3 \right]_0^1$$

$$= \frac{1-a}{2} + \frac{a}{3}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{a}{6}$$

$$\therefore \frac{7}{6} a = \frac{1}{2} \quad \therefore a = \frac{3}{7}$$

$$\therefore \underline{f(x) = \frac{3}{7}x + 1}$$