2011 年 第 4 問

$\boxed{4}$ 次の各問に答えよ．

(1) $x > 0$ のとき，不等式 $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ が成り立つことを証明せよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} xe^{-x} = 0$ を証明せよ．

(3) 関数 $y = xe^{-x}$ の増減・凹凸を調べ，そのグラフを描け．

(4) n を自然数とする．$I_n = \displaystyle\int_0^n xe^{-x}\,dx$ を計算し，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} I_n$ を求めよ．