神戸大学

2015年 第4問　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ a, bを実数とし，自然数kに対して $x_k=\dfrac{2ak+6b}{k(k+1)(k+3)}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $x_k=\dfrac{p}{k}+\dfrac{q}{k+1}+\dfrac{r}{k+3}$ がすべての自然数kについて成り立つような実数p, q, rを，a, bを用いて表せ．

(2) $b=0$のとき，3以上の自然数nに対して $\sum_{k=1}^{n} x_k$ を求めよ．

また，$a=0$のとき，4以上の自然数nに対して $\sum_{k=1}^{n} x_k$ を求めよ．

(3) 無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ の和を求めよ．

(1) $x_k=\dfrac{p}{k}+\dfrac{q}{k+1}+\dfrac{r}{k+3}$ と表せたとき．

$$x_k=\frac{p(k+1)(k+3)+qk(k+3)+rk(k+1)}{k(k+1)(k+3)}$$

$$=\frac{(p+q+r)k^2+(4p+3q+r)k+3p}{k(k+1)(k+3)}$$

∴ 係数を比較して．

$$\begin{cases} p+q+r=0 \\ 4p+3q+r=2a \\ 3p=6b \end{cases} \iff \begin{cases} q+r=-2b \\ 3q+r=2a-8b \\ p=2b \end{cases} \iff \underline{p=2b,\ q=a-3b,\ r=-a+b}$$ //

(2) $b=0$ のとき (1)より．$x_k=\dfrac{a}{k+1}-\dfrac{a}{k+3}$ $(\because p=0,\ q=a,\ r=-a)$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} x_k = a\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$$=a\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}+\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{5}}+\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{6}}+\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}+\cdots+\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+2}+\cancel{\frac{1}{n+1}}-\frac{1}{n+3}\right)\quad (n\geqq 3)$$

$$=a\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$=\underline{\frac{an(5n+13)}{6(n+2)(n+3)}}$$ //

$a=0$ のとき．(1)より．$x_k=\dfrac{2b}{k}-\dfrac{3b}{k+1}+\dfrac{b}{k+3}$ $(\because p=2b,\ q=-3b,\ r=b)$

$$\therefore x_k=2b\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-b\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$$

神戸大学

2015 年 第 4 問　　2枚目／2枚

数理 石井K

4 a，b を実数とし，自然数 k に対して $x_k=\dfrac{2ak+6b}{k(k+1)(k+3)}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $x_k=\dfrac{p}{k}+\dfrac{q}{k+1}+\dfrac{r}{k+3}$ がすべての自然数 k について成り立つような実数 p，q，r を，a，b を用いて表せ．

(2) $b=0$ のとき，3 以上の自然数 n に対して $\sum_{k=1}^{n} x_k$ を求めよ．

また，$a=0$ のとき，4 以上の自然数 n に対して $\sum_{k=1}^{n} x_k$ を求めよ．

(3) 無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ の和を求めよ．

(2) のつづき．

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} x_k = 2b\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) - b\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$$= 2b\left(1-\frac{1}{n+1}\right) - b\cdot\frac{n(5n+13)}{6(n+2)(n+3)}$$

b=0のときの計算より．

$$= b\cdot\frac{2n\cdot 6(n+2)(n+3)-n(n+1)(5n+13)}{6(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \underline{\frac{bn(7n^2+42n+59)}{6(n+1)(n+2)(n+3)}}\ //$$

(3) $$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2ak}{k(k+1)(k+3)}}_{b=0\text{のときの和}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{6b}{k(k+1)(k+3)}}_{a=0\text{のときの和}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{an(5n+13)}{6(n+2)(n+3)} + \lim_{n\to\infty}\frac{bn(7n^2+42n+59)}{6(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{5}{6}a + \frac{7}{6}b$$

$$= \underline{\frac{1}{6}(5a+7b)}\ //$$