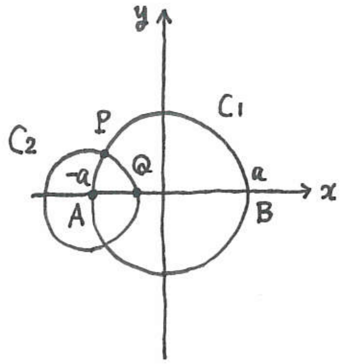
2015年 医学部 第19問

$\boxed{19}$ 円 $C_1 : x^2+y^2=a^2$（a は正の実数）のとき，円 C_1 と x 軸との交点を A$(-a,\ 0)$，B$(a,\ 0)$ とする．円 C_2 は点 A を中心とする円であり，円 C_1 上の点 P（P の y 座標は正の実数とする）で円 C_1 と交わることとする．線分 AB と円 C_2 の交点を Q としたとき，線分 PQ の長さの最大値を M とする．$\dfrac{3\sqrt{6}M}{2a}$ の値を求めよ．

$P(a\cos\theta,\ a\sin\theta)\ (0<\theta<\pi)$ とおくと



$$AP=\sqrt{(a\cos\theta+a)^2+(a\sin\theta)^2}$$
$$=a\sqrt{1+2\cos\theta+1}$$
$$=2a\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$
$$=2a\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore\ Q\left(2a\cos\frac{\theta}{2}-a,\ 0\right)$$

$$\therefore\ PQ^2=\left(a\cos\theta-2a\cos\frac{\theta}{2}+a\right)^2+a^2\sin^2\theta$$
$$=a^2+4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}+a^2-4a^2\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}+2a^2\cos\theta-4a^2\cos\frac{\theta}{2}$$
$$=8a^2\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\cos^3\frac{\theta}{2}\right)$$

$t=\cos\frac{\theta}{2}$ とした

$y=t^2-t^3\ (0<t<1)$ とおくと

$$y'=2t-3t^2=-3t\left(t-\frac{2}{3}\right)$$

t	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	(1)
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	

$\therefore$ 右の増減表より y の最大値は $\frac{4}{27}$

$$\therefore\ M^2=8a^2\cdot\frac{4}{27}\qquad \therefore\ M=\frac{4\sqrt{6}}{9}a$$

$$\therefore\ \frac{3\sqrt{6}M}{2a}=\underline{4}\ /\!/$$