0000223816779999

香川大学

2011年 教育学部・農学部 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ △ABCの外接円の半径は1である．この外接円の中心Oから3つの辺BC，CA，ABへ下ろした垂線をそれぞれOL，OM，ONとし，

$$\sqrt{3}\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OM}+(2+\sqrt{3})\overrightarrow{ON}=\vec{0}$$

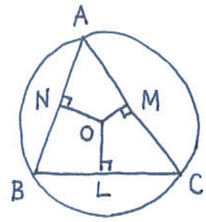
が成立しているとする．$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ とおくとき，次の問に答えよ．

(1) $\vec{c}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ．

(2) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ．

(3) ∠AOB および ∠ACB を求めよ．

(4) △ABCの面積を求めよ．



(1) 点L，M，Nはそれぞれ線分BC，CA，ABの中点なので

$\overrightarrow{OL}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$，$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{a})$，$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$

これを与式に代入して，$\frac{\sqrt{3}}{2}(\vec{b}+\vec{c})+\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{a})+\frac{2+\sqrt{3}}{2}(\vec{a}+\vec{b})=\vec{0}$

$\therefore (\sqrt{3}+1)\vec{c}=-(3+\sqrt{3})\vec{a}-2(\sqrt{3}+1)\vec{b}$

$\therefore \underline{\vec{c}=-\sqrt{3}\,\vec{a}-2\vec{b}}$ //

(2) (1)の結果より，$|\vec{c}|^2=3|\vec{a}|^2+4\sqrt{3}\,\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

ここで，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ より，$4\sqrt{3}\,\vec{a}\cdot\vec{b}=-6$ $\quad\therefore \underline{\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{\sqrt{3}}{2}}$ //

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle AOB$ と(2)の結果より，$\cos\angle AOB=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\therefore \underline{\angle AOB=150^\circ}$ //

円周角と中心角の関係より，$\underline{\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB=75^\circ}$ //

(4) (1)の結果より，$4|\vec{b}|^2=3|\vec{a}|^2+2\sqrt{3}\,\vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{c}|^2$ $\quad\therefore \vec{c}\cdot\vec{a}=0$ $\quad\therefore \angle AOC=90^\circ$

$\therefore \angle BOC=360^\circ-\angle AOB-\angle AOC=120^\circ$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin150^\circ+\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin90^\circ+\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin120^\circ$

$=\underline{\frac{3+\sqrt{3}}{4}}$ //