0002005454997999

自治医科大学

2015年 医学部 第25問

数理 石井K

$\boxed{25}$ 関数 $f(x)$ は，等式 $f(x)=3x^2\int_{-1}^{1}f(t)\,dt+x\int_0^1\{f'(t)\}^2\,dt+\int_0^1 f(t)\,dt$ を満たす．$f(0)-\frac{1}{4}$ の値を求めよ．$\int_0^1 f(t)\,dt \neq 0$ とする．

$f(x)=3ax^2+bx+c$ とおくと．

$a=\int_{-1}^{1}f(t)\,dt$ ， $b=\int_0^1\{f'(t)\}^2\,dt$ ， $c=\int_0^1 f(t)\,dt$ より．

$a=\left[ax^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right]_{-1}^{1}=2a+2c$　　$\therefore\ a=-2c$ …①

$$b=\int_0^1(6ax+b)^2\,dt=\int_0^1 36a^2x^2+12abx+b^2\,dt$$
$$=\left[12a^2x^3+6abx^2+b^2x\right]_0^1$$
$$=12a^2+6ab+b^2$$

$\therefore\ 12a^2+6ab+b^2=b$ …②

$c=\left[ax^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right]_0^1=a+\frac{b}{2}+c$　　$\therefore\ a=-\frac{b}{2}$ …③

②，③より．$3b^2-3b^2+b^2=b$　　$\therefore\ b=0,1$

- $b=0$ のとき．

　③より $a=0$ ，①より $c=0$ 　これは条件 $\int_0^1 f(t)\,dt\neq 0$ に反する．

　$\therefore\ b=0$ は不適

- $b=1$ のとき．

　③より．$a=-\frac{1}{2}$ ，①より $c=\frac{1}{4}$

以上より．

$f(0)-\frac{1}{4}=c-\frac{1}{4}=\underline{0}$ //