0001955364408999

# 京都府立大学

2014年 生命環境（生命分子化学） 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 定数 $a$ を正の実数とする．2つの放物線 $C_1: y=2x^2+1$，$C_2: y=-\sqrt{2}(x+a)^2+1$ がある．$C_1$，$C_2$ の両方に接する直線を $C_1$，$C_2$ の共通接線という．以下の問いに答えよ．

(1) $C_1$ 上の任意の点Pの $x$ 座標を $t$ とする．点Pにおける $C_1$ の接線の方程式を $t$ を用いて表せ．

(2) $C_1$，$C_2$ の共通接線がちょうど2本存在することを示せ．

(3) $C_1$，$C_2$ の2本の共通接線と $C_1$ とで囲まれた部分の面積を $a$ を用いて表せ．

(1) $y'=4x$，$P(t, 2t^2+1)$ であるから．

点Pにおける $C_1$ の接線は．$y=4t(x-t)+2t^2+1$　$\therefore \underline{y=4tx-2t^2+1}$ //

(2) $C_2$ 上の任意の点 $Q(s, -\sqrt{2}(s+a)^2+1)$ における接線は．

$y'=-2\sqrt{2}(x+a)$ より．　$y=-2\sqrt{2}(s+a)(x-s)-\sqrt{2}(s+a)^2+1$

$\therefore\ y=-2\sqrt{2}(s+a)x+\sqrt{2}s^2-\sqrt{2}a^2+1$

$\therefore$ これと(1)で求めた接線が一致するので．

$$\begin{cases} 4t=-2\sqrt{2}(s+a) & \cdots ① \\ -2t^2+1=\sqrt{2}s^2-\sqrt{2}a^2+1 & \cdots ② \end{cases}$$

①，②より．$-2\cdot\frac{1}{2}(s+a)^2-\sqrt{2}s^2+\sqrt{2}a^2=0$

$\therefore\ (1+\sqrt{2})s^2+2as+a^2-\sqrt{2}a^2=0 \ \cdots (*)$　判別式をDとおくと．

$D/4=a^2-(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})a^2$

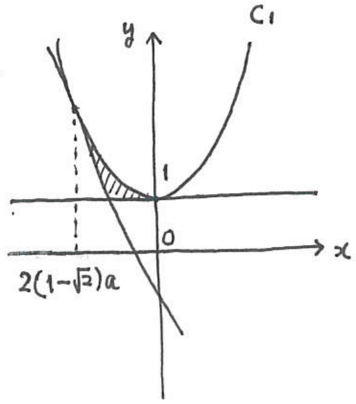
$=2a^2$

$a>0$ より．$D>0$ となり．$C_1$ と $C_2$ の共通接線はちょうど2本存在する ■

(3) $(*)$ より．$\{(1+\sqrt{2})s+(1-\sqrt{2})a\}(s+a)=0$　$\therefore\ s=-a,\ (3-2\sqrt{2})a$

$\therefore$ 2本の共通接線と $C_1$ との接点の $x$ 座標は．$x=0,\ 2(1-\sqrt{2})a$

また．接線どうしの交点の $x$ 座標は　$x=(1-\sqrt{2})a$




$\therefore\ S=\int_{2(1-\sqrt{2})a}^{(1-\sqrt{2})a} 2x^2+1-8(1-\sqrt{2})ax+8(1-\sqrt{2})^2a^2-1\,dx$

$+\int_{(1-\sqrt{2})a}^{0} 2x^2+1-1\,dx$

$=\int_{2(1-\sqrt{2})a}^{(1-\sqrt{2})a} 2\{x-2(1-\sqrt{2})a\}^2dx+\int_{(1-\sqrt{2})a}^{0} 2x^2dx$ 　と中略　$=\underline{\frac{4}{3}(\sqrt{2}-1)^3a^3}$ //