高知大学

2010年 第4問

数理 石井K

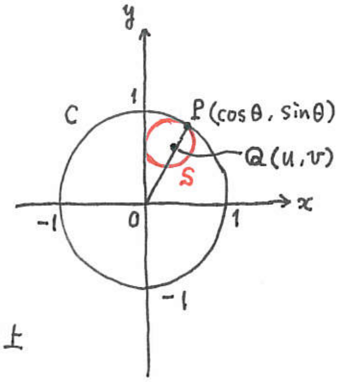
$\boxed{4}$ xy 平面上の原点を中心として半径1の円 C を考える．$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とし，C 上の点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ を P とする．P で C に接し，さらに y 軸と接する円でその中心が円 C の内部にあるものを S とし，その中心 Q の座標を $(u,\ v)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) u と v をそれぞれ $\cos\theta$ と $\sin\theta$ を用いて表せ．

(2) $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ としたとき，点 Q の軌跡の式を求めよ．さらに，その軌跡を図示せよ．

(3) 円 S の面積を $D(\theta)$ とするとき，次の値を求めよ．

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{D(\theta)}{\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)^2}$$



(1) S が y 軸に接することから，S の半径は $u\ (>0)$ となる．

P での円 C の接線を l とすると，これは円 S の接線でもあり，

$OP \perp l$ かつ $QP \perp l$ より，$OP \parallel QP$ ∴ 3点 O, P, Q は同一直線上にある．

$OP : QP = 1 : u$（S の半径）より，$\overrightarrow{OQ} = (1-u)\overrightarrow{OP}$

∴ $(u,\ v) = (1-u)(\cos\theta,\ \sin\theta)$

∴ $u = (1-u)\cos\theta$，$v = (1-u)\sin\theta$ これを解いて，$\underline{u = \dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\ ,\ v = \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}}$ //

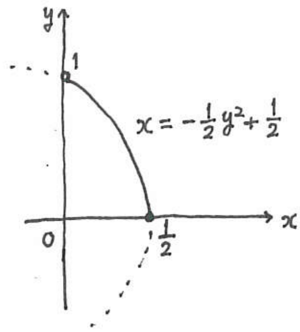
(2) (1) より，

$u^2 + v^2 = \dfrac{1}{(1+\cos\theta)^2}$ であり，$u = \dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}$ より，$\cos\theta = \dfrac{u}{1-u}$ なので

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{\left(1 + \frac{u}{1-u}\right)^2}$$

$$= (1-u)^2$$

∴ $u = -\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}$ ∴ Q の軌跡は，$\underline{x = -\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\ (0 \leqq y < 1)}$ //



図示すると，右のようになる．$(\frac{1}{2}, 0)$ は含み，$(0, 1)$ は含まない．

(3) $D(\theta) = \pi u^2 = \pi\left(\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)^2$

$$\therefore \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{\pi\left(\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)^2}{\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\pi\left(\frac{\sin x}{1+\sin x}\right)^2}{x^2}$$

$\left(x = \dfrac{\pi}{2} - \theta \text{ とおいた}\right)$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\pi}{(1+\sin x)^2} \cdot \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}_{\to 1}$$

$$= \underline{\pi}\ //$$