



2010年医学部第4問

4 X を 2 次の正方行列として以下の問いに答えよ.

- (1) p, q を実数とし $q \neq 0$ とする. $\begin{pmatrix} p & q \\ 0 & p \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & p \end{pmatrix}$ ならば, X は $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ の形に表せることを示せ.
- (2) $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ のとき, 自然数 n に対し $X^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$ となることを数学的帰納法により示せ. ただし $a^0 = 1$ とする.
- (3) m, n を自然数とする. X の各成分は 0 以上の整数で, さらに $X^{n+1} - X^n = \begin{pmatrix} 2^{m+1} & 2^{50} \\ 0 & 2^{m+1} \end{pmatrix}$ を満たすものとする. このような行列 X が存在するような組 (m, n) をすべて求めよ.