同志社大学

2014年 理系全学部日程 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 曲線 $C : y = (\log x)^2 + \frac{3}{4}$ $(x > 0)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ．また，$\frac{dy}{dx} > 0$ となる x の範囲を求めよ．

(2) 曲線 C の接線で原点 $(0,\ 0)$ を通るものを求めよ．

(3) 曲線 C の概形と (2) で求めた接線を描け．

(4) (2) で求めた接線の中で傾きが最大のものと曲線 C との接点を P とする．点 P の座標を求めよ．

(5) (4) で求めた点 P を通り x 軸に平行な直線と曲線 C で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(1) $\underline{\frac{dy}{dx} = \frac{2\log x}{x},\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{2}{x}\cdot x - 2\log x}{x^2} = \frac{2(1-\log x)}{x^2}}$ //

$\frac{dy}{dx} > 0$ となるのは，$\underline{x > 1}$ //

(2) 接点を $(t,\ (\log t)^2 + \frac{3}{4})$ $(t > 0)$ とおくと，接線は，

$$y = \frac{2\log t}{t}(x - t) + (\log t)^2 + \frac{3}{4}$$

これが原点を通るので，$0 = -2\log t + (\log t)^2 + \frac{3}{4}$

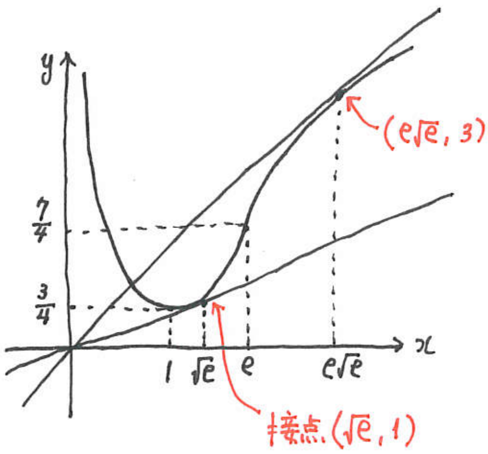
$\therefore (\log t - \frac{1}{2})(\log t - \frac{3}{2}) = 0$ $\therefore \log t = \frac{1}{2},\ \frac{3}{2}$ $\therefore t = \sqrt{e},\ e\sqrt{e}$

$\therefore$ 接線は，$\underline{y = \frac{1}{\sqrt{e}}x,\ y = \frac{3}{e\sqrt{e}}x}$ //

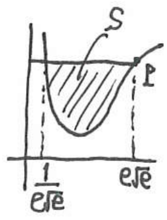
(3) 増減表は (1) より次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	e	$\cdots$	$(+\infty)$
$\frac{dy}{dx}$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$\frac{d^2y}{dx^2}$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
y	$(+\infty)$	↘	$\frac{3}{4}$	↗	$\frac{7}{4}$	↗	$(+\infty)$

$\therefore$ 右のグラフになる．



(4) 傾きが最大のものは $y = \frac{3}{e\sqrt{e}}x$ より，$\underline{P(e\sqrt{e},\ 3)}$ //



(5) $(\log x)^2 + \frac{3}{4} = 3$ より $\log x = \pm\frac{3}{2}$ $\therefore$ $x = e\sqrt{e},\ \frac{1}{e\sqrt{e}}$

$$\therefore S = \int_{\frac{1}{e\sqrt{e}}}^{e\sqrt{e}} -(\log x)^2 + \frac{9}{4}\,dx = \Big[-x(\log x)^2\Big]_{\frac{1}{e\sqrt{e}}}^{e\sqrt{e}} + \int_{\frac{1}{e\sqrt{e}}}^{e\sqrt{e}} 2\log x\,dx + \frac{9}{4}\left(e\sqrt{e} - \frac{1}{e\sqrt{e}}\right)$$

$= \underline{\frac{\sqrt{e}(e^3+5)}{e^2}}$ // $\left(= e\sqrt{e} + \frac{5}{e\sqrt{e}}\ \text{でもよい}\right)$