



2014年理系第3問

3 整数 m, n は $m \geq 1, n \geq 2$ をみたすとする。次の問いに答えよ。

- (1) $x > 0$ のとき, $y = \log x$ の第1次導関数 y' と第2次導関数 y'' を求めよ。
- (2) 座標平面上の3点 $A(m, \log m), B(m+1, \log m), C(m+1, \log(m+1))$ を頂点とする三角形の面積を S_m とする。 S_m を m を用いて表せ。
- (3) $f(m) = \log m + S_m - \int_m^{m+1} \log x dx$ とおく。 $f(m) < 0$ が成り立つことを, $y = \log x$ のグラフを用いて説明せよ。
- (4) $f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) < 0$ であることを用いて, 不等式

$$\log 1 + \log 2 + \cdots + \log(n-1) < n \log n - n + 1 - \frac{1}{2} \log n$$

を証明せよ。

- (5) 不等式 $n! < e\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ を証明せよ。ただし, e は自然対数の底である。