金沢大学

2014年 文系 第3問

数理 石井K

3 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=2^n-1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

をみたしている．次の問いに答えよ．

(1) 一般項 a_n を求めよ．

(2) $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$ とおくとき，

$$S_n=4-\frac{n+2}{2^{n-1}} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

となることを数学的帰納法を用いて証明せよ．

(3) 和 $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_k}$ を求めよ．

$U(n)=\frac{1}{2^0}+\frac{3}{2^1}+\frac{5}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}$

$-)\ \frac{1}{2}U(n)=\quad\frac{1}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-3}{2^{n-1}}+\frac{2n-1}{2^n}$

$\frac{1}{2}U(n)=1+\frac{2}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{2}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^n}$

$\therefore \frac{1}{2}U(n)=1+2\cdot\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}$

$\therefore U(n)=6-\frac{2n+3}{2^{n-1}}$

(1) $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=2^n-1$ ——(*) に $n+1$ を代入して．

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n+(n+1)a_{n+1}=2^{n+1}-1$

これらの式を引いて，$(n+1)a_{n+1}=2^n$ $(n\geqq 1)$

$\therefore n\cdot a_n=2^{n-1}$ $(n\geqq 2)$ $\quad\therefore a_n=\frac{2^{n-1}}{n}$ $(n\geqq 2)$

(*)式に $n=1$ を代入すると，$a_1=1$ したがって $a_n=\frac{2^{n-1}}{n}$ //

$n=1$ のときも含んでいる

(2) (i) $n=1$ のとき

$S_n=4-\frac{3}{2^0}=1$ $\quad a_1=1$ より成り立つ

(ii) $n=m$ のとき，成り立つと仮定すると

$S_m=4-\frac{m+2}{2^{m-1}}$

$\therefore S_{m+1}=4-\frac{m+2}{2^{m-1}}+\frac{1}{a_{m+1}}=4-\frac{m+2}{2^{m-1}}+\frac{m+1}{2^m}=4-\frac{(m+1)+2}{2^m}$

$\therefore n=m+1$ のときも成り立つ．したがって $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ について成り立つ ▨

(法) (2)を使ったらもっと簡単に出せる

(3) $T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_k}$ とおくと，

$T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2^{k-1}}$

$T_n=\frac{1^2}{2^0}+\frac{2^2}{2^1}+\frac{3^2}{2^2}+\cdots+\frac{n^2}{2^{n-1}}$

$-)\ \frac{1}{2}T_n=\quad\frac{1^2}{2^1}+\frac{2^2}{2^2}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{2^{n-1}}+\frac{n^2}{2^n}$

$\frac{1}{2}T_n=\left(\frac{1}{2^0}+\frac{3}{2^1}+\frac{5}{2^2}+\frac{7}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}\right)-\frac{n^2}{2^n}$

$U(n)$ とおく

$\therefore T_n=12-\frac{4n+6}{2^{n-1}}-\frac{n^2}{2^{n-1}}=12-\frac{n^2+4n+6}{2^{n-1}}$ //