



2014年 医学部 第3問

3 行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  に対して、ベクトル  $\vec{u} = (p, q)$ ,  $\vec{v} = (r, s)$  は

$$|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1, \quad A \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

を満たすとする。ただし、 $\alpha, \beta$  は相異なる実数である。このとき、次の問に答えよ。

(1) ベクトル  $\vec{u}, \vec{v}$  は直交することを示せ。

(2) 行列  $X = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$  は逆行列をもつことを示せ。

(3) (2) の  $X$  に対して、 $AX = X \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$  となることを示せ。

(4) 自然数  $n$  に対して、 $A^n = \begin{pmatrix} f_n & g_n \\ h_n & k_n \end{pmatrix}$  とする。このとき、 $f_n + k_n$  を  $\alpha, \beta, n$  を用いて表せ。