佐賀大学

2015年 農・文化教育学部 第2問　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ a, b, cを正の定数とし，3点A$(a,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ b,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ c)$の定める平面をαとする．また，原点をOとし，平面αに垂直な単位ベクトルを$\vec{n}=(n_1,\ n_2,\ n_3)$とする．ただし，$n_1>0$とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $\vec{n}$を求めよ．

(2) 平面α上に点Hがあり，直線OHはαに垂直であるとする．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$および$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$を求めよ．

(3) △ABCの面積をS，△OBCの面積をS_1とする．四面体OABCの体積を考えることにより，$S_1=n_1S$であることを示せ．

(1) $\vec{n}\perp\alpha \iff \vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ かつ $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$ より，

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=(n_1,n_2,n_3)\cdot(-a,0,c)$$
$$=-an_1+cn_3$$
$$\therefore\ -an_1+cn_3=0\ \cdots①$$

同様に，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-an_1+bn_2=0\ \cdots②$

①，②より，$\vec{n}=\left(n_1,\ \frac{a}{b}n_1,\ \frac{a}{c}n_1\right)$

また，$|\vec{n}|=1$より，$n_1^2+\frac{a^2}{b^2}n_1^2+\frac{a^2}{c^2}n_1^2=1$　$\therefore$ $n_1>0$より

$$n_1=\frac{bc}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}\qquad \therefore\ \vec{n}=\frac{1}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}(bc,\ ca,\ ab)$$

(2) $OH\perp\alpha$，$\vec{n}\perp\alpha$より，$OH/\!/\vec{n}$

$\therefore\ \overrightarrow{OH}=k(bc,\ ca,\ ab)$　(k：実数)と表せる．

$\therefore\ \overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}=(kbc-a,\ kca,\ kab)$

Hはα上にあるので，$\overrightarrow{AH}=l\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}$と表せる．

$\therefore\ (kbc-a,\ kca,\ kab)=(-la,\ lb,\ 0)+(-ma,\ 0,\ mc)$

$$\therefore\ \begin{cases} kbc-a=-la-ma & \cdots③\\ kca=lb & \cdots④\\ kab=mc & \cdots⑤\end{cases}$$

④より，$l=\frac{kca}{b}$，⑤より $m=\frac{kab}{c}$　これらを③に代入して，

$$k=\frac{abc}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\qquad \therefore\ |\overrightarrow{OH}|=\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}},\ \overrightarrow{OH}=\frac{abc}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}(bc,\ ca,\ ab)$$

0002070639297999

佐賀大学

2015年 農・文化教育学部 第2問　　2枚目／2枚

数理 石井K

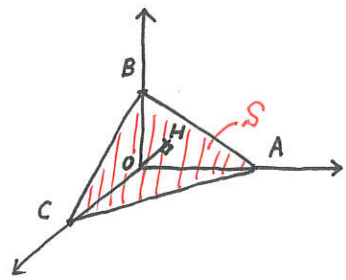
$\boxed{2}$ a, b, cを正の定数とし，3点A$(a,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ b,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ c)$の定める平面をαとする．また，原点をOとし，平面αに垂直な単位ベクトルを$\vec{n}=(n_1,\ n_2,\ n_3)$とする．ただし，$n_1>0$とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $\vec{n}$を求めよ．

(2) 平面α上に点Hがあり，直線OHはαに垂直であるとする．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$および$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$を求めよ．

(3) △ABCの面積をS，△OBCの面積をS_1とする．四面体OABCの体積を考えることにより，$S_1=n_1S$であることを示せ．

(3) 四面体OABCの体積をVとおくと．



$$V=S\cdot|\overrightarrow{OH}|\cdot\frac{1}{3}\quad\cdots①$$

一方．$V=S_1\cdot a\cdot\frac{1}{3}\quad\cdots②$　と表せるので．

$$\frac{1}{3}S|\overrightarrow{OH}|=\frac{1}{3}a\cdot S_1$$

$$\therefore\ S_1=\frac{|\overrightarrow{OH}|}{a}\cdot S$$

(2)より．$S_1=\dfrac{bc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}\cdot S$

(1)より．$S_1=n_1S$ ▨